ЛЕЦИОННЫЙ КОМПЛЕКС

Дисциплина: «Моделирование химико-технологических процессов»

Код дисциплины: MHTP 3301

Название ОП : 6B0720100 «Технология фармацевтических производств»

Объем учебных часов /(кредитов): 180 часов /(6 кредита)

Курс и семестр изучения: 3 курс, 5 семестр

Объем лекций: 12 часов

Шымкент, 2024

Лекционный комплекс разработан в соответствии с рабочей учебной программой дисиплины (силлабусом) «Моделирование химико-технологических процессов» и обсуждена на заседании кафедры.

Зав.кафедрой _____ Орымбетова Г.Э..

протокол №__ от «_____» _____ 2024 г.

Лекция 1 Вводная

Цель: Проблемы и вопросы о развитии и формировании методов идентификации; философские аспекты моделирования; идентификация в процессах управления; основные понятия о моделях и методах их построения; неизбежность упрощения модели по сравнению с реальным объектом; отражение свойств объекта, существенных для цели моделирования; адекватность и критерии адекватности модели.

Тезисы

Задачу идентификации характеристик системы можно рассматривать как дуальную по отношению к задаче управления системой. Нельзя управлять системой, если она не идентифицирована либо заранее, либо в процессе управления. Например, мы не можем управлять автомобилем, пока не познакомимся с его реакцией на поворот руля, нажатие акселератора или тормоза, т. е. пока не ознакомимся со свойствами автомобиля. Этот процесс освоения автомобиля («привыкания» к нему) и представляет собой процесс идентификации. Таким образом, идентификацию реакции автомобиля мы осуществляем и в том случае, когда нам не известна система описывающих его дифференциальных уравнений. В общем случае, если необходимо перевести систему из состояния А в состояние В, то можно положиться либо на свое умение управлять системой, либо изучить реакции системы на одно или несколько управляющих воздействий. Если априори известно, что воздействие Uj переводит систему ближе к состоянию В, то следует прилагать именно это входное воздействие. В отсутствие такого априорного знания можно измерять реакции системы на ряд входных воздействий, выполняя таким образом по существу идентификацию. Знание результатов идентификации до начала процесса управления существенно влияет на его реализацию.

Выявление дифференциальных уравнений процесса представляет собой одну из возможных, но не единственную форму идентификации. Можно, например, составить таблицу возможных управляющих воздействий и соответствующих им откликов системы в заданном интервале времени. Из этой таблицы можно затем легко определить лучшие (с точки зрения преследуемой цели) процессы управления. Подобно этому могут быть сформированы идентификационные модели и на основании других методов описания процессов.

Ни один из обсуждаемых методов идентификации не годится для идентификации всех видов систем. Каждый из них имеет свою область или области применения. Это, однако, не означает, что на современном уровне идентификация должна рассматриваться как набор готовых рецептов для различных типов систем. Сейчас уже можно говорить о теории идентификации, имеющей дело с оцениванием параметров на основании измеренных текущих входных и выходных данных, причем качество идентификации повышается с увеличением числа измерений. Ошибки идентификации, естественно, приводят к ошибкам в управлении или в требуемом выходном параметре системы; эти ошибки могут быть использованы для дальнейшего улучшения идентификации. Следовательно, теория идентификации аналогична, точнее, дуальна теории управления, в которой ошибки управления (в предположении, что система идентифицирована) используются для улучшения последующего процесса управления. Аналогично теории управления в теории идентификации существует несколько подходов, применяемых ко многим ситуациям и случаям.

порядка, который может быть нелинейным и нестационарным.

Краткая справка о развитии и формировании методов идентификации

Математические модели являются одним из основных инструментов познания человеком явлений окружающего мира. Под математическими моделями понимают основные закономерности и связи, присущие изучаемому явлению. Это могут быть формулы или уравнения, наборы правил или соглашений, выраженные в математической форме. Испокон веков в математике, механике, физике и других точных науках естествознания для описания изучаемых ими явлений использовались математические модели. Так, законы Ньютона полностью определяют закономерности движения планет вокруг Солнца. Используя основные законы механики, относительно нетрудно составить уравнения, описывающие движение космического аппарата, например, от Земли к Луне. Однако получить их решение в виде простых формул не представляется возможным. Для расчета траекторий космических аппаратов служат компьютеры.

Применение компьютеров для математического моделирования изменило само понятие "решить задачу". До этого исследователь удовлетворялся написанием математической модели. А если ему еще удавалось доказать, что решение (алгоритм) в принципе существует, то этого было достаточно, если априори полагать, что модель адекватно описывает изучаемое явление. Еще одна область использования вычислительного эксперимента - это "вычислительная технология" - применение математического моделирования с помощью компьютеров не только для решения фундаментальных научных проблем, но и для разработки технологических процессов в промышленности. Для тех случаев, когда технологические процессы описываются хорошо известными математическими моделями, для расчета которых предложены эффективные вычислительные алгоритмы, разработаны пакеты прикладных программ, технология вычислительного эксперимента позволяет создавать новые программы и совершенствовать средства общения человека с компьютером. У технологов есть потребность в изучении новых промышленных технологий, например лазерно-плазменной обработки материалов (плазменной термохимии).

Философские аспекты моделирования

В настоящее время нельзя назвать область человеческой деятельности, в которой в той или иной степени не использовались бы методы моделирования. Особенно это относится к сфере управления различными системами, где основными являются процессы принятия решений на основе получаемой информации. Остановимся на философских аспектах моделирования, а точнее общей теории моделирования.

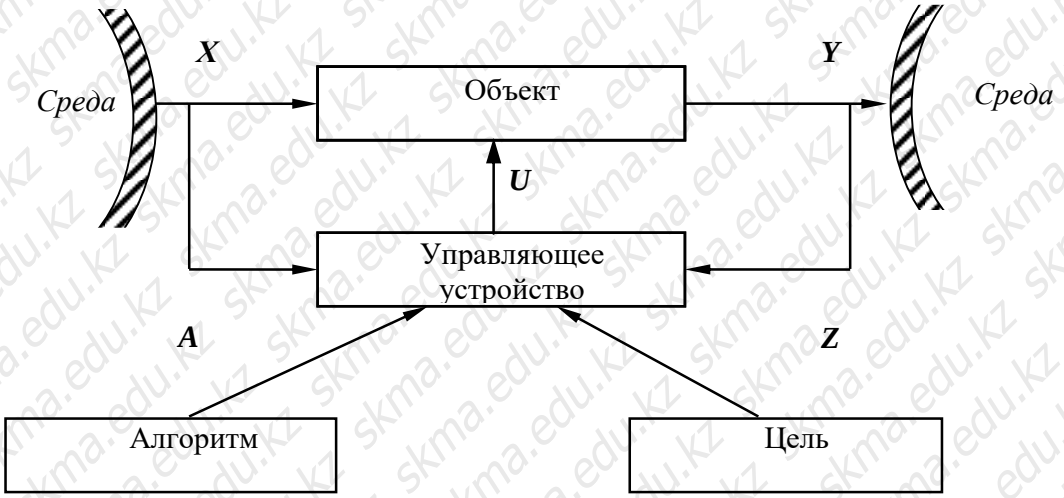
Методологическая основа моделирования. Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется объектом (лат. objection — предмет). Выработка методологии направлена на упорядочение получения и обработки информации об объектах, которые существуют вне нашего сознания и взаимодействуют между собой и внешней средой.

Идентификация в процессах управления

Важнейшей задачей современной теории и практики управления является построение модели ОУ, т. е. формализация закономерностей функционирования объекта. На основе этой модели определяются структура, алгоритмы и параметры СУ, выбираются аппаратно-программные средства реализации системы. Одним из эффективных методов построения модели сложного объекта является идентификация.

С проблемой моделирования мы сталкиваемся в двух случаях: во-первых, в процессах познания, когда стараются познавательные модели объектов и явлений, с которыми приходится сталкиваться человеку, и во-вторых, в процессах управления, связанных с целенаправленным изменением объекта, т.е. с достижением целей, постановленных человеком.

Под управлением будем понимать процесс такого целенаправленного воздействия на объект, в результате которого объект оказывается в определенном смысле «ближе» к выполнению поставленных целей , чем до управления. На рисунке 1.1). показана общая схема управления объектом.



X- неуправляемая, но контролируемая составляющая;
U - управляемая составляющая; Y-информация о состоянии объекта, доступная управляющему устройству.

Рисунок 1.1 - Общая схема управления объектом

Для синтеза управления необходимо прежде всего определить цель Z, т.е. то, к чему должно «стремиться » управляющее устройство при воздействии на объект, каким должен быть объект с точки зрения управления. Однако, этого мало, необходимого еще иметь алгоритм управления A, который указывает, как достигнуть этой цели.

Таким образом управление реализуется четверкой

<U,I=<X,Y>,A,Z>,

где U-управляющее воздействие; I=<X,Y> - информация о состоянии среды и объекта; A- алгоритм; Z-цель управления.

Цель Z определяет требования, выполнение которых обеспечивается и организацией управляющего воздействия U с помощью алгоритма A и сбором информации по каналу Y. Не зная, как X и U влияют на состояние Y, т.е. не имея модели Y=F(X,U), нельзя определить управление U, достаточно лишь констатировать наличие определенной формальной связи.

Теория идентификации и моделирования – это научно-техническая дисциплина, которая занимается вопросами построения моделей объектов управления и систем управления и решает проблему оценки параметров этих моделей.

Выводы.

Построение математической модели объекта может производиться несколькими методами: аналитическим, экспериментальным и экспериментально-аналитическим.

Комплекс задач при идентификации модели объекта обычно разделяется на три этапа:

- на первом этапе выбирается структура модели по результатам изучения объекта или по имеющимся априорным сведениям,
- на втором этапе - критерий близости (подобия) модели и объекта,

- на третьем этапе по экспериментальным данным определяются параметры модели исходя из выбранного критерия.

Начальные представления называют априорной (доопытной) информацией, в противоположность апостериорной (послеопытной) информации. Обычно апостериорная информация – это выборка (массивы, составленные из значений сигналов, измеренных на входе и выходе объекта); характер априорной информации может быть более разнообразен – представление о структуре оператора изучаемого объекта, частотной характеристике сигналов и объекта, функции распределения случайных величин и т.п.

Контрольные вопросы

1 Развитии и формировании методов идентификации;
2 Философские аспекты моделирования;
3 Основные понятия о моделях и методах их построения;
4 Адекватность и критерии адекватности модели;
5 Идентификация в процессах управления.

Литература

Основная литература

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа. 2001
2. Авдеев П. Ф. Философия информационной цивилизации. — М.: ВЛАДОС, 1994

Дополнительная литература

3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009.
4. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.

Лекция 2 Математические модели обьектов идентификации

Цель: Рассмотреть обзорно-теоретический материал по следующим вопросам и проблемам: общие сведения о математических моделях и их классификация; множество моделей, структуры моделей; линейные модели и множества линейных моделей; семейство моделей передаточных функций; модели в пространстве состояний; модели с распределенными параметрами; временные характеристики; дискретные модели; дискретные модели в пространстве состояний; статические и динамические модели в форме управления регрессии.

Тезисы

Классификация математических моделей

Могут быть предложены различные методы классификации моделей объектов и систем, рассмотрим основные из них.

Физические модели. В основу классификации положена степень абстрагирования модели от оригинала. Предварительно все модели можно подразделить на две группы: материальные (физические) и абстрактные (математические). Физической моделью обычно называют систему, которая эквивалентна или подобна оригиналу, либо у которой процесс функционирования такой же, как у оригинала, и имеет ту же или другую физическую природу. Можно выделить следующие виды физических моделей: натурные, квазинатурные, масштабные и аналоговые.

Натурные модели — это реальные исследуемые системы. Их называют макетами и опытными образцами. Натурные модели имеют полную адекватность с системой-оригиналом, что обеспечивает высокую точность и достоверность результатов моделирования. Процесс проектирования ВС завершается зачастую испытанием опытных образцов. Квазинатурные модели представляют собой совокупность натурных и математических моделей.

Аналоговыми моделями называются системы, имеющие физическую природу, отличающуюся от оригинала, но сходные с оригиналом процессы функционирования. Обязательным условием при этом является однозначное соответствие между параметрами изучаемого объекта и его модели, а также тождественность безразмерных математических описаний процессов, протекающих в них **Математические модели**. Математическая модель представляет собой формализованное описание системы с помощью абстрактного языка, в частности с помощью математических соотношений, отражающих процесс функционирования системы.

К средствам **абстрактного описания систем** относятся также языки химических формул, схем, чертежей, карт, диаграмм и т. п. Выбор вида модели определяется особенностями изучаемой системы и целями моделирования, так как исследование модели позволяет получить ответы на определенную группу вопросов. Для получения другой информации может потребоваться модель другого вида.

Цели моделирования и характерные черты оригинала определяют в конечном счете ряд других особенностей моделей и методы их исследования. Например, математические модели можно классифицировать на детерминированные и вероятностные (стохастические). Первые устанавливают однозначное соответствие между параметрами и характеристиками модели, а вторые — между статистическими значениями этих величин. Выбор того или иного вида модели обусловлен степенью необходимости учета случайных факторов. Среди математических моделей можно выделить по методу их исследования аналитические, численные и имитационные модели.

Аналитической моделью называется такое формализованное описание системы, которое позволяет получить решение уравнения в явном виде, используя известный математический аппарат.

Численная модель характеризуется зависимостью такого вида, который допускает только частные численные решения для конкретных начальных условий и количественных параметров модели.

Имитационная модель — это совокупность описания системы и внешних воздействий, алгоритмов функционирования системы или правил изменения состояния системы под влиянием внешних и внутренних возмущений. Эти алгоритмы и правила не дают возможности использования имеющихся математических методов аналитического и численного решения, но позволяют имитировать процесс функционирования системы и производить измерения интересующих характеристик.

В дальнейшем нами основное внимание уделяется математическому моделированию, широко используемому при исследовании сложных технических систем.

Отметим, что одни и те же объекты могут быть описаны различными по сложности математическими моделями. Главным критерием выбора при этом является её **адекватность** исследуемому объекту.

Математические модели статических (ММС) объектов

Постановка задачи моделирования и идентификации статических характеристик объектов (см рисунок 2.1).

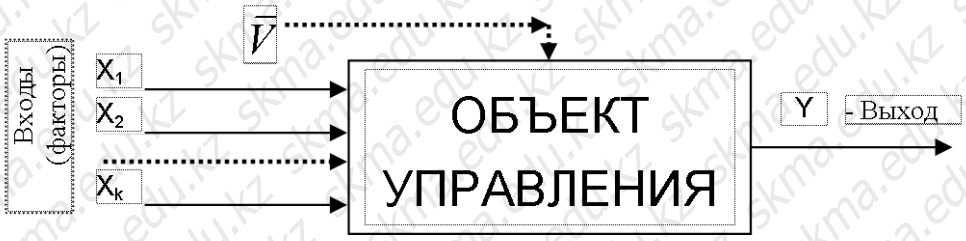


Рисунок 2.1 - Структура объекта статики

Статические характеристики широко применяются при расчете и исследовании систем в условиях установившихся состояний, когда все переходные процессы или завершились, или ими можно пренебречь. Характерной особенностью ММС является то, что в них отсутствуют производные по времени.

В общем виде ММС объекта – функция отклика, связывающая входные параметры X с входными $Y = \varphi(X_1, X_2 \ldots X_K)$ при наличии вектора возмущений V. При использовании статистических методов ММ статики обычно представляется в виде уравнения регрессии (полинома, отрезка ряда Тейлора, в который разлагается функция φ):

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \cdot X_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} b_{ij} \cdot X_i \cdot X_j \qquad (2.1)$$

где $\hat{Y}$ - расчетное значение выхода; X_i - входы;

$\overline{V}$ - вектор возмущений (шумы, помехи); N, n – количество опытов;

N0, n0 , – количество параллельных (дублирующих) опытов или опытов в центре плана; m – количество серий параллельных опытов;

k - количество входов (факторов, степень полинома);

N_{EX} – число экспериментальных точек плана;

L ; $L_{ЗН}$ – соответственно количество всех и значимых коэффициентов в уравнении регрессии;

$b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$- выборочные коэффициенты регрессии, определяемые в результате идентификации;

b_0 - свободный член уравнения регрессии;

$b_1, b_2, b_3, \ldots$- линейные эффекты; $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \ldots$- квадратичные эффекты;

$b_{12}, b_{23}, b_{13}, \ldots$- эффекты парного взаимодействия;

$b_{111}, b_{222}, b_{333}, \ldots$- эффекты тройного взаимодействия;

Например, чисто применяют вид уравнения для k=3 (L =10):

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 + b_{11} \cdot X_1^2 + b_{22} \cdot X_2^2 + b_{33} \cdot X_3^2 + b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + b_{13} \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{23} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{123} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \quad (2.2)$$

Могут применяться и другие виды ММС, в том числе и отражающие физическую природу изучаемого явления или объекта. Выбор модели вида (2.2) обусловлен его простотой, и , достаточно большой точностью описания исследуемых зависимостей. Дополнительные замечания по поводу выбора вида математической модели (уравнения регрессии). Традиционно используется вид (1), при необходимости (если уравнение не адекватно описывает эксперимент) могут быть добавлены члены вида $bi \cdot X_i^3$, $b_j \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ и т.д. Особых вычислительных трудностей при определении значений коэффициентов b_i уравнения регрессии b_i при этом не возникает, однако, характер изменения поведения графика функции высоких порядков сразу за пределами диапазона аппроксимации и даже между точками, найденными экспериментально может бать непредсказуем.

Математические модели линейных динамических (ММД) объектов и систем и связь между ними. ММД.

Широко используются при анализе и синтезе различных систем автоматизации (см. рисунок 2.2). ММД описывают изменение параметров во времени, в их выражения обязательно прсутствуют производные по времени или другие эквивалентные им параметры. Очень часто (в обоснованных случаях) используют линейные ММД.



Рисунок 2.2 – Объект динамики

Принято обозначать векторы входных воздействий буквой U (управления), векторы выходных воздействий буквой X (состояния) или Y (выходы), векторы возмущающих воздействий буквой V(на рисунке 2.2 – не показаны)

Все ММД можно разделить на классы.

1 Модели для описания непрерывных систем

Линейные **дифференциальные уравнения** (ДУ) это наиболее общая форма описания динамики, однако их практическое использование и инженерной практике часто бывает сложным.

Наиболее общий вид записи ДУ:

$$a_{n+1}\frac{d^n x}{dt^n}+\ldots+a_2\frac{dx}{dt}+a_1 x=b_{m+1}\frac{d^m u}{dt^m}+\ldots+b_2\frac{du}{dt}+b_1 u \qquad (2.3).$$

Передаточные функции (ПФ). В инженерной практике часто используются ММД в виде ПФ. Для объектов с самовыравниванием ПФ в общем виде:

$$W(p)=C\cdot\frac{b_1+b_2\cdot p+\ldots+b_{m+1}\cdot p^m}{a_1+a_2\cdot p+\ldots+a_{n+1}\cdot p^n}\cdot\exp(-p\cdot\tau). \quad (n\geq m) \qquad (2.4)$$

При использовании «метода площадей» (b1=a1=1) [ ]:

$$W(p)=C\cdot\frac{b_1+b_2\cdot p}{a_1+a_2\cdot p+a_3\cdot p^2}\cdot\exp(-p\cdot\tau), \text{ или} \qquad (2.5)$$

$$W(p)=C\cdot\frac{b_1}{a_1+a_2\cdot p+a_3\cdot p^2+a_4\cdot p^3}\cdot\exp(-p\cdot\tau) \qquad (2.6)$$

Другие виды, например:

$$W(p)=\frac{C\cdot\exp(-p\cdot\tau)}{\prod_{i=1}^{n}(1+T_i\cdot p)} \text{ и т.п.} \qquad (2.7)$$

Очень часто применяют упрощенное выражение ПФ в виде апериодического звена с запаздыванием:

$$W(p)=\frac{C}{1+T\cdot p}\cdot\exp(-p\cdot\tau) \qquad (2.8)$$

Для объектов без самовыравнивания используется передаточная функция в общем случае используется в виде:

$$W(p)=\left[\frac{D}{p}-C\cdot\frac{b_1+b_2\cdot p+\ldots+b_{m+1}\cdot p^m}{a_1+a_2\cdot p+\ldots+a_{n+1}\cdot p^n}\right]\cdot\exp(-p\cdot t) \qquad (2.9)$$

(обращаем внимание на то, что здесь присутствует **интегральная** составляющая - величина 1/p)

или упрощенные выражения для объектов без самовыравнивания:

$$W(p)=\frac{C}{p\cdot T_{Б}\cdot(1+T\cdot p)}\cdot\exp(-p\cdot\tau)$$ или: (2.10)

$$W(p)=\frac{C}{T\cdot p}\cdot\exp(-p\cdot\tau)$$ (2.11)

Конкретный вид W(p) выбирается из условия обеспечения адекватности и удобства вычислений.

Адекватность математической модели может быть, например, оценена по формуле (2.12). Если значение δ, найденное по этой формуле, не превышает 3-7%, то модель считается адекватной:

$$\delta=\frac{100\%}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{X_i-\hat{X}_i}{X_i}$$ (2.12)

Для уравнения вида (2.8) выход $\hat{X}_i$ определяется аналитически по формуле (см. пример на рисунке 8.7):

$$\hat{X}(t)=C\cdot\Delta U\cdot\left[1-\exp(-\frac{t-\tau}{T})\right]$$ (при $t\geq\tau$) (2.13)

$$\hat{X}(t)=0$$ (при $t<\tau$) (2.13А)

а для W(p) вида (2.7) при n=2:

$$W(p)=\frac{C\cdot\exp(-p\cdot\tau)}{(1+T_1\cdot p)\cdot(1+T_2\cdot p)}$$

$$\hat{X}(t)=C\cdot\Delta U\cdot\left(1-\frac{T_1}{T_1-T_2}\cdot\exp(-\frac{t-\tau}{T_1})+\frac{T_2}{T_1-T_2}\cdot\exp(-\frac{t-\tau}{T_2})\right)$$ (2.14)

В более общем случае в качестве критерия соответствия при решении данной задачи берут критерий вида:

$$\min(F_{ai}),\ F(a_i)=\sum_{j=1}^{n}\left(X_i-\hat{X}_i\right)^2$$ (2.15)

где X_i – экспериментальное значение;

$\hat{X}_i$ – расчётное значение.

Для нахождения коэффициентов a_i составляют уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial a_i}=0$$ (2.16)

Таким образом, получается система уравнений, решая которую можно определить a_i.

Для его определения вначале вычисляется критерий SSE (Sum of squares due to error) - сумма квадратов ошибок по формуле:

$$SSE = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (y_k - \hat{y}_k)^2 ,$$

где w_k - веса (у нас они не заданы, и считаются равными единице);

y_k - экспериментальные (исходные) значения данных для каждого опыта;

$\hat{y}_k$ - расчетные (предсказанные) значения данных для каждого опыта, получены по формуле (1);

n - количество экспериментальных значений (например, n=20).

Критерий R-квадрат (обозначенный ниже как R) определяется как отношение суммы квадратов относительно регрессии SSR к полной сумме квадратов (SST), т.е.:

$$SSR = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (\hat{y}_k - \bar{y}_k)^2; \qquad SST = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (y_k - \bar{y}_k)^2; \qquad R = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST},$$

где $\bar{y}_k$ - среднее значение экспериментальных (исходных) значения данных.

Близость полученных значений критерия R-квадрат к единице говорит о высокой точности описания эксперимента, например выражением вида (2.2). Обычно приемлемыми для практики считают значения критерия R-квадрат выше 0,9.

Частотные характеристики (ЧХ). При подаче на вход **линейной** системы сигнала:

$$U(t) = A_u \sin(\omega t) = A_u \cdot \exp(j\omega t) \qquad (2.17)$$

на выходе будет сигнал:

$$X(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi) = A_x \cdot \exp(j\omega t + \varphi), \qquad (2.18)$$

а АФЧХ имеет вид:

$$W(j\omega) = C \cdot \frac{b_1 + b_2 \cdot j\omega + \ldots + b_{m+1} \cdot j\omega^m}{a_1 + a_2 \cdot j\omega + \ldots + a_{n+1} \cdot j\omega^n} \cdot \exp(-j\omega \cdot \tau) =$$
$$= A(\omega) \cdot \exp(j\phi(\omega)) = \mathrm{Re}W(\omega) + \mathrm{Im}W(\omega) \qquad (2.19),$$

Где:

$$A(\omega) = \sqrt{[\mathrm{Re}W(\omega)]^2 + [\mathrm{Im}W(\omega)]^2} \qquad (2.20)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{[\mathrm{Im}W(\omega)]}{[\mathrm{Re}W(\omega)]} \qquad (2.21)$$

Используются также **весовые функции**:

$$x(t) = \int_0^t g(t-\tau) y(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) y(t-\tau) d\tau \qquad (2.22),$$

2 Модели для описания дискретных систем

Линейные разностные уравнения

Математические модели в цифровых системах управления записываются в виде рекуррентных разностных уравнений .

Если математическая модель ТОУ представлена передаточной функцией вида (2.8) и использован **фиксатор нулевого порядк**а, то выход объекта в цифровом виде для момента времени T_j определяется как:

$$X_j = A \cdot X_{j-1} + B \cdot U_{j-D} \qquad (2.25)$$

где $A = -\exp(-T_O / T)$, $B = (1 - A) \cdot C$, $D = [\tau / T_O]$

Уравнение (2.25) является разностным эквивалентом непрерывного уравнения объекта (2.8) для дискретных моментов времени j = 1, 2, 3, ….

D - число, округленное до ближайшего большего целого, определяет запаздывание ТОУ, выраженное в целом числе периодов опроса T_O.

Для j < D:

$X_j = A \cdot X_{j-1}$ X_{j-1} - выход объекта в момент времени T_j -T_O, т.е. на прошлом шаге опроса.

U_{j-D} - управляющее воздействие (выход регулятора) в момент времени T_j -D.

Дискретные передаточные функции:

$$W(z) = \frac{y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{-n} + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-(n-1)} + \ldots a_0} \qquad (2.26)$$

Модель в пространстве параметров состояния

x(k+1)=A*x(k)+B*U(k) (2.27)
y(k)=Ст*x(k)

цифровые разностные рекуррентные уравнения:

$X_j = A \cdot X_{j-1} + B \cdot U_{j-D}$. (2.29)

3 Модели для описания нелинейных систем (см рисунок 2.3)

u(t)=δ(t) y(t)=ω(t)

$$y(t) = \int_0^\infty \omega(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(\tau_1, \tau_2) \cdot u(t-\tau_1) \cdot u(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \qquad (2.30)$$

$$y(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(\tau_1 \tau_2 \tau_3) \cdot u(t-\tau_1) \cdot u(t-\tau_2) \cdot u(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \qquad (2.31)$$

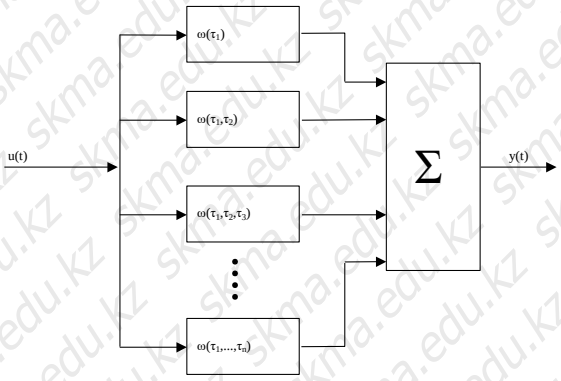


Рисунок 2.3 – нелинейные модели динамики

4 Стохастические модели. Модель нелинейной системы с использованием ядер Вольтера. При рассмотрении явлений в моделях с шумами принято оценивать влияние шумов на процесс идентификации путем использования понятий авто - и взаимно - корреляционной функций. Оценку влияния шумов можно производить, если процесс описания шумов описать следующим уравнением:

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t-\tau) dt \qquad (2.31)$$

R_{uu}- автокорреляционная функция входного сигнала (см. в лекции 6) ;

R_{uy}- взаимнокорреляционная функция входного и выходного сигнала.

Свойства идентификации: управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

Управляемость – система управляема, если для любого момента времени при любых состояниях существует такое управление u, которое переводит начальное состояние системы в конечное.

$$u_y = \left[B; AB; \ldots A^{n-1}B\right]$$

где n – порядок системы; A – матрица коэффициентов при x;

B – матрица коэффициентов при r.

Условием управляемости системы является то, чтобы $\det u_y$ не был равен нулю.

Наблюдаемость – система наблюдаема, если любое или все ее состояния можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы.

$u_н = \left[C^T; C^T A^T; \ldots C^T \left(A^{n-1}\right)^T\right]$, где C – матрица выхода, коэффициенты при y.

Хотя бы один минор не должен быть равен нулю, в этом случае система наблюдаема.

Идентифицируемость – система идентифицируема, если по изменениям координат состояния системы можно определить ее параметры.

$$ID = \left[V(0); A^n V(0); \ldots A^{nn} V(0)\right],$$

где V(0) – вектор начальных условий; Ап – матрица перехода.

$$A^n = A^R + I,$$

где AR – расширенная матрица; I – единичная матрица.

Система идентифицируема, если $\det \neq 0$.

Идентификация динамических систем. Допустим, динамическая система описана передаточной функцией следующего вида:

$$W(p)=\frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_{m+1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n}$$

Получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка из n - уравнений

$$\frac{dx}{dt} = AX(t) + BU(t)$$

$$Y(t) = CX(t)$$

где Y – выходные переменные, U(t) – входные переменные, X – внутренние переменные.

Контрольные вопросы

1 Общие сведения о математических моделях и их классификация;
2 Множество моделей, структуры моделей;
3 Ллинейные модели и множества линейных моделей, семейство моделей передаточных функций, модели в пространстве состояний;
4 Модели с распределенными параметрами, временные характеристики;
5 Дискретные модели; дискретные модели в пространстве состояний;
6 Статические и динамические модели в форме управления регрессии.

Литература

Основная литература

1. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
2. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009

Лекция 3 Статические и динамические модели в форме уравнения регрессии (ч. 1)

Цель: Рассмотреть основные теоретические разделы теории вероятностей и линейной алгебры. Эти сведения понадобятся нам в следующих лекциях и на выполнении лабораторных и практических занятиях. Отметим, что использование таких систем, как Mathcad и MATLAB значительно упрощают практическое применение данного материала.

Тезисы

Регрессионный анализ является в настоящее время классическим статистическим методом. Благодаря своим широким возможностям различные регрессионные процедуры давно и успешно используются в инженерной практике для идентификации процессов, однако их применение к идентификации многомерных процессов в реальном масштабе времени стало возможным только с развитием и внедрением быстродействующих компьютеров**.**

Элементы теории вероятностей. Основные понятия и определения.

В теории вероятностей широко используются понятия события, вероятности, случайной величины.

Событие - всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события. Предположим, что рассматривается некоторый опыт или явление, в котором в зависимости от случая происходит или не происходит некоторое событие А.

Случайной величиной называется величина, которая может принимать то или иное значение, неизвестное заранее.

Случайные величины могут быть двух типов:

- дискретные (прерывные), принимающие только отделенные друг от друга значения, которые можно заранее пронумеровать;
- непрерывные (аналоговые), которые могут принимать любое значение из некоторого промежутка.

Дискретные законы распределения. Закон распределения дискретной случайной величины (дискретный закон распределения) может быть задан одним из следующих способов:

- аналитически в виде математического выражения, отражающего зависимость вероятности от значения случайной величины;
- таблично в виде ряда распределения случайной величины, в котором перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности;
- графически в виде многоугольника распределения, при котором по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат - вероятности этих значений.

В теории вероятностей используется большое количество числовых характеристик, имеющих различное назначение и различные области применения. Из них наиболее часто используются начальные и центральные моменты различных порядков, каждый из которых описывает то или иное свойство распределения. Начальные моменты рассматриваются относительно начала координат, а центральные моменты – относительно математического ожидания, то есть центра распределения.

Пусть дискретная случайная величина X может принимать значения x1, x2,…,xk. Тогда: Частота появления события X= xi (частота = min) – отношение числа опытов mi в которых X приняла значение xi к общему числу опытов n.

Вероятность события X=xi [обозначается P(X=xi)] стремится к min при большом n: pi= P(X=xi) ≈ min

Аксиомы теории вероятностей Колмогорова.

1)Вероятность появления случайного события A – неотрицательное число: P(A)≥ 0

2)Вероятность достоверного события U – равна единице: P(U)=1; а невозможного события V – равна нулю: P(V)=0, т.е. 0 ≤ P ≤ 1

3)Вероятность того, что наступит хотя бы одно из нескольких несовместимых событий A1 + A2 + … + An равно сумме вероятностей этих событий (теорема сложения вероятностей): P(A1 + A2 + … + An) = P(A1) + P(A2) + … + P(An)

Сумма событий (A1 + A2 + … + An) это событие, соответствующее появлению хотя бы одного из событий Ai, а произведение, это событие, соответствующее появлению всех событий Ai. Сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равно единице.

События независимые, если вероятность любого из них не зависит от того, произойдет или нет любое из остальных. Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

P(A1 · A2 · … · An) = P(A1) · P(A2) · … · P(An).

Событие A зависимо от события B, если вероятность события A меняется в зависимости появления события B. Вероятность события A, вычисленная при условии, что произошло события B – условная вероятность события A, обозначается P(A/B).

Пример. Требуется определить надежность системы автоматического управления, состоящей из трех последовательно соединенных элементов, каждый из которых может выйти из строя. Вероятности безотказной работы каждого из них соответственно равны: P(A1) = 0,9; P(A2) = 0,85; P(A3) = 0,82. В соответствии с теоремой умножения P(A1 · A2 · A3) = P(A1) · P(A2) · P(A3) = 0,9 ·0,85 ·0,82 = 0,6273

Математическое ожидание и дисперсия, их оценка и свойства. Оценка математического ожидания переменной X (обозначается mX или $\overline{X}$):

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (3.1)$$

n – количество опытов

Оценка дисперсии переменной X (обозначается σ_X^2 или S_X^2):

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{f} \qquad (3.2)$$

Число степеней свободы f = [общее число измерений] – [число оценок, уже рассчитанным по этим измерениям и примененным в текущей формуле]. В данном случае уже рассчитана и используется величина $\overline{X}$, т.е. $f = n - 1$.

$S_X = \sqrt{S_X^2}$, среднее квадратичное отклонение (ошибка, стандарт).

Оценка дисперсии воспроизводимости Y (обозначается σ_Y^2 или S_Y^2):

$$S^2_{ВОСПР} = \frac{\sum_{i=1}^{n_0}(Y_i - \bar{Y})^2}{n_0 - 1} \quad (3.3)$$

или $$S^2_{ВОСПР} = \frac{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_0}(Y_{ji} - \bar{Y}_j)^2}{m \cdot (n_0 - 1)} \quad (3.3А)$$

$S_{ВОСП} = \sqrt{S^2_{ВОСП}}$ - ошибка опыта (ошибка воспроизводимости, среднеквадратическая ошибка, среднеквадратическое отклонение -СКО).(См [1] стр.37)

Оценка остаточной дисперсии Y (дисперсии адекватности):

$$S^2_{ОСТ} = \frac{\sum_{i=1}^{n_0}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n_0 - L} \quad (3.4)$$

$\hat{Y}$ - расчетное значение выхода; L – количество коэффициентов в уравнении регрессии;

Нормальное распределение.

$$f(x) = \frac{1}{S_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(X - \bar{X})^2}{2 \cdot S_X^2}} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (3.5)$$

Критерий Стьюдента. Критерий позволяет определить значимость коэффициентов уравнения регрессии. b_i. (используется для проверки гипотезы значимости коэффициентов). Для этого для каждого из L коэффициентов b_i. Рассчитывают по формуле:

$$t_{b_i} = \frac{|b_i|}{S_{b_i}}, \quad (3.6)$$

если $t_{b_i} > t_{ТАБ}(f)$, то b_i считается значимым, в противном случае он не значимым и приравнивается к нулю.

$$S_{b_i} = \sqrt{\frac{S^2_{ВОСПР}}{k}} = \frac{S_{ВОСПР}}{\sqrt{k}}, \; S_{ВОСПР} = \sqrt{S^2_{ВОСПР}} \quad (3.7)$$

S_{b_i} - среднеквадратическая ошибка в определении коэффициента регрессии b_i;

$t_{ТАБ}(f)$ - табличное значение критерия Стьюдента при f = n0 – 1 или f =m· (n0 – 1);

Иногда незначимость b_i может быть вызвана и другими причинами, например, неверным интервалом варьирования при подготовке к эксперименту. Ниже приведен пример на Mathcad использования критерия Стьюдента. [1, стр.164].

Îöåíêà çà÷èì îñòè êîýôôèöèåíòîâ óðàâíåíèÿ ïî êðèòåðèþ Ñòüþäåíòà.

Èñõîäíûé âåêòîð êîýôôèöèåíòîâ $b^T = (8.5 \;\; 2.5 \;\; -0.5 \;\; 3.5 \;\; -0.5 \;\; 0.5 \;\; -1.5 \;\; -0.5)$

Ïðè âîñüìè 3 ïàðàëëåëüíûõ îïûòàõ $Y0_1 = 8 \quad Y0_2 = 9 \quad Y0_3 = 8.8$

$n0 = 3 \quad i = 1 .. n0$

$L = 8 \quad j = 1 .. L$

Ìàòåìàòè÷åñêîå Y0= $Y0cp = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n0} Y0_i\right)}{n0} \quad Y0cp = 8.6$

Îïðåäåëåíèå äiñïåðñèè âîñïðîèçâîäèìîñòè Sb

$S2b = \dfrac{\left[\sum_{m=1}^{M} \left(Y0_m - y0\right)^2\right]}{f2} \quad S = \sqrt{S2b} \quad Sb = \dfrac{S}{\sqrt{N}}$

$S2b = 0.28 \quad S = 0.529 \quad Sb = 0.187$

$Stud = \begin{pmatrix} 12.71 \\ 4.30 \\ 3.18 \\ 2.78 \\ 2.57 \\ 2.45 \\ 2.37 \\ 2.31 \\ 2.26 \\ 2.23 \end{pmatrix}$ <---ï ðè-f=2

$T_j = \dfrac{|b_j|}{Sb} \quad T^T = (45.434 \;\; 13.363 \;\; 2.673 \;\; 18.708 \;\; 2.673 \;\; 2.673 \;\; 8.018 \;\; 2.673)$

×èñëî ñòåïåíåé ñâîáîäû äiñïåðñèè âîñïðîèçâîäèìîñòè= $f = n0 - 1 \quad f = 2$

$b_j = if\left[T_j < Stud_{(f)}, 0, b_j\right]$

Çíà÷èìûå êîýôôèöèåíòû $b^T = (8.5 \;\; 2.5 \;\; 0 \;\; 3.5 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1.5 \;\; 0)$

Таким образом, в этом примере Lзн = 4

Критерий Кохрена. Применяется для проверки воспроизводимости опытов (для проверки гипотезы воспроизводимости опытов):

$$G_P = \frac{S^2_{MAX}}{\sum_{i=1}^{n_0} S_i^2}, \qquad (3.8)$$

т.е. расчетное значение GP определяется как отношение наибольшей из оценок дисперсий к сумме всех найденных оценок дисперсий.

Если расчетное GP > GТАБ, то дисперсии неоднородны, т.е. значения Y не подчиняются нормальному закону распределения, а опыты невоспроизводимы). S^2_{MAX} - наибольшая из оценок выборочных дисперсий;

n0 – общее число сравниваемых дисперсий (количество параллельных (дублирующих) опытов);

$\sum_{i=1}^{n_0} S_i^2$ - сумма всех оценок дисперсий. Количество опытов в серии должно быть одинаковым, в противном случае можно воспользоваться критерием Бартлетта. Необходимо знать: n0 и число степеней свободы f = n0 - 1. Если опыты невоспроизводимы, то можно попытаться выявить и устранить источники

невоспроизводимости (помехи), увеличить точность измерения и т.п. Если воспроизводимость не может быть обеспечена, то и результаты эксперимента не могут быть использованы для дальнейшей математической обработки. Например, (см. таб.) рассмотрим эксперимент, состоящий из трех серий (m = 3) по два параллельных опыта (n0 = 2). В них выход Y зависит от двух факторов X1 и X2.

номера серий опытов	Параллельные опыты				Yi2средн%	Дисперсия Y= Si^2
	Условия опытов		Выходы			
	X1 гр.С	X2 %	Yi1 %	Yi2 %		
1	24	45	35	36	35,5	0,5
2	24	55	39,3	38,1	38,7	0,72
3	25	45	31,8	33,4	32,6	1,28
					Сумма =	2,5

Расчетное значение критерия Кохрена GP = 1.28/2.5 = 0.51, в таб. (при m = 3 и f = n0 – 1 = 1) находим GTАБ = 0.967, т.к. GP < GTАБ, то опыты воспроизводимы, а оценки дисперсий можно считать однородными.

Вычислим также оценку дисперсии воспроизводимости:

$$S^2_{ВОСПР} = \frac{\sum_{i=1}^{n_0}(Y_i - \bar{Y})^2}{n_0 - 1}$$ =(0.50 + 0.72 + 1.28)/3 = 0.83, с ней связано число степеней свободы f = m·(n0 - 1) = 3·(2-1) = 3.

Критерий Фишера. Используется для проверки адекватности уравнения регрессии.

Расчетное значение критерия Фишера определяют как:

$$F_{РАС} = \frac{S^2_{ОСТ}}{S^2_{ВОСПР}} \qquad (3.9)$$

Оценка остаточной дисперсии (дисперсии адекватности) рассчитывают по формуле:

$$S^2_{ОСТ} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{n - L_{ЗН}}$$ $\hat{Y}$ - значения Y, рассчитанные по уравнению регрессии на основе значимых коэффициентов. Если выполняется условие $F_{РАС} \le F_{ТАБ}$, уравнение регрессии адекватно описывает экспериментальные данные. $F_{ТАБ}$ определяется при известных значениях степеней свободы f1 для числителя и f2 для знаменателя.

f1 = n – L3H и f2 = n0 – 1.

Обычно используют уровень значимости p=0,05.

Выборочный коэффициент корреляции[См.1, стр.121]**:**

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \bar{X}\right)\cdot\left(Y_i - \bar{Y}\right)\right]^2}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \cdot \sum_{i}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 \cdot\right]}} \text{ или } r^*_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i - \bar{X}\right)\cdot\left(Y_i - \bar{Y}\right)\right]^2}{(n-1)\cdot S_X \cdot S_Y}$$

Рассмотрим пример на Mathcad, для данных приведенный в [1, стр.164].

Ï ðîâåðêà àäåêâàòíîñòè óðàâíåíèÿ ðåãðåññèè ï î êðèòåðèþ Ôèø åðà.

Çà÷èì ûåêîýôôèöèåíòû $b^T = (8.5 \;\; 2.5 \;\; 0 \;\; 3.5 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1.5 \;\; 0)$

$$Yr_i = b_1 \cdot X_{i,1} + b_2 \cdot X_{i,2} + b_3 \cdot X_{i,3} + b_4 \cdot X_{i,4} + b_5 \cdot X_{i,5} + b_6 \cdot X_{i,6} + b_7 \cdot X_{i,7} + b_8 \cdot X_{i,8}$$

×èñëî ñòåïåíåé ñâîáîäû äiñïåðñèè âîñïðîèçâîäèìîñòè= $f2 = n0 - 1$ $f2 = 2$

$$S2o = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - Yr_i\right)^2\right]}{f1}$$

×èñëî ñòåïåíåé ñâîáîäû îñòàòî÷íîé äiñïåðñèè f1: $f1 = N - 4$ $f1 = 4$

Îñòàòî÷íàÿ äiñïåðñèÿ= $S2o = 2$

$$F = \frac{S2o}{S2b}$$

$$Fisher = \begin{pmatrix} 164.4 & 199.5 & 215.7 & 224.6 & 230.2 \\ 18.50 & 19.20 & 19.20 & 19.30 & 19.30 \\ 10.10 & 9.600 & 9.300 & 9.100 & 9.000 \\ 7.700 & 6.900 & 6.600 & 6.400 & 6.300 \\ 6.600 & 5.800 & 5.400 & 5.200 & 5.100 \end{pmatrix} \quad Yr = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 9 \\ 11 \\ 16 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \\ 10 \\ 18 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$Fisher_{f2,f1} = 19.3$ $F = 7.143$

Òàê êàê F<Fisher , òî óðàâíåíèå àäåêâàòíî îïèñûâàåò ýêñïåðèìåíò

Основы матричной алгебры (операции с матрицами)

Матрица - математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы чисел (или элементов кольца) и допускающий алгебраические операции (сложение, вычитание, умножение) между ним и другими подобными объектами. Обычно матрицы представляются двумерными (прямоугольными) таблицам. Использование матричного аппарата позволяет значительно упростить вычислительные операции с использованием линейных математических моделей.

Говорят «матрица размера $m \times n$,» подразумевая, что в матрице m строк и n столбцов. В такой матрице индексы элементов удовлетворяют неравенствам $0 < i \leqslant m,$ (если индексы отсчитываются от единицы) или $0 \leqslant i < m,$ (если индексы отсчитываются от нуля).

Операции над матрицами. Пусть a_{ij} - элементы матрицы A, а b_{ij} - элементы матрицы B.

Линейные операции (это умножение на число, сложение и вычитание).

Умножение матрицы A на число λ (обозначение: λA) заключается в построении матрицы B, элементы которой получены путём умножения каждого элемента матрицы A на это число, то есть каждый элемент матрицы B равен: $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Сложение матриц A + B есть операция нахождения матрицы C, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц A и B, то есть каждый элемент матрицы C равен: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Вычитание матриц A − B определяется аналогично сложению, это операция нахождения матрицы C, элементы которой: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Примеры:

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 0+1 & -1+0 \\ 1+8 & 3+2 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 0-1 & -1-0 \\ 1-8 & 3-2 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Нелинейные операции (это умножение матриц, возведение в степень, транспонирование, обращение). Умножение матриц (обозначение: AB, реже со знаком умножения $A \times B$) — есть операция вычисления матрицы C, элементы которой равны сумме произведений элементов в соответствующей строке первого множителя и столбце второго, а именно:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

В первом множителе должно быть столько же столбцов, сколько строк во втором. Если матрица A имеет размерность $m \times n$, B - $n \times k$, то размерность их произведения AB = C есть $m \times k$. Схема этой процедуры показана на рисунке 3.1

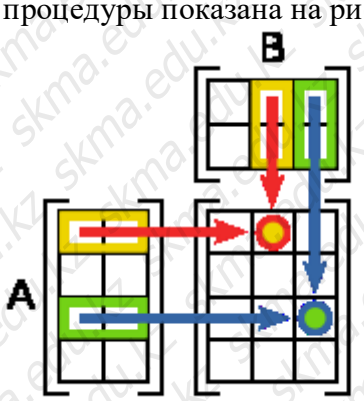


Рисунок 3.1 – Схема умножения матриц

Примеры умножения матриц:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 5 \cdot (-1) + 7 \cdot (-2) & 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -19 & 31 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & -1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & -2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & 9 & 6 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 46 & 18 \\ -5 & 41 & 33 \\ 20 & 46 & 18 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 24 & 6 \\ -3 & 57 & 18 \\ 0 & 56 & 24 \end{pmatrix}$$

Возводить в степень можно только квадратные матрицы, непример:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -4 & 118 & 42 \\ -32 & 97 & -27 \\ -4 & 118 & 42 \end{pmatrix} \quad A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 118 & 42 \\ -32 & 97 & -27 \\ -4 & 118 & 42 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы (обозначение: A^T) — операция, при которой матрица отражается относительно главной диагонали, то есть: $a_{ij}^T = a_{ji}$

Если A — матрица размера $m \times n$, то A^T — матрица размера$n \times m$.

Свойства операций над матрицами

- ассоциативность сложения: A + (B + C) = (A + B) + C.
- коммутативность сложения: A + B = B + A.
- ассоциативность умножения: A(BC) = (AB)C.

Если количество строк матрицы равно количеству столбцов, то такая матрица называется квадратной. Для квадратных матриц существует единичная матрица E (аналог единицы для операции умножения чисел) такая, что умножение любой матрицы на неё не влияет на результат, а именно: EA = AE = A. У единичной матрицы единицы стоят только по главной диагонали, остальные элементы равны нулю.

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Сингулярность матрицы иногда делает невозможность выполнять решение задчи регрессионного анализа и решения уравнений.

Матрица как запись коэффициентов системы линейных уравнений. Систему из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Векторы. Нами будут использоваться понятие вектор в смысле - одномерная матрица, т.е. вектор столбец. Для удобства записи вектора в строчку иногда применяют запись вида $\mathbf{B^T}$= вместо записи **B**=. Для вектора справедливы все приведенные выше правила операций с матрицами, например:

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad X \cdot Y = 34 \quad Y \cdot X = 34 \quad X \cdot Y^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 10 & 8 & 14 \\ 15 & 12 & 21 \end{pmatrix} \quad X^T \cdot Y = 34$$

Контрольные вопросы

1 Основные теоретические разделы теории вероятностей и линейной алгебры;
2 Аксиомы теории вероятностей Колмогорова;
3 Критерий Кохрена;
4 Критерий Фишера.

Литература

Основная литература

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 1985. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.

Дополнительная литература

3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009
4. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.

Лекция 4 Статические и динамические модели в форме уравнения регрессии (ч. 2)

Цель: Рассмотреть методы регрессионного анализа, применяемые при получении статических и динамические модели в форме управления регрессии.

Тезисы

Корреляционный анализ результатов моделирования.

С помощью корреляционного анализа исследователь может установить, насколько тесна связь между двумя (или более) случайными величинами, наблюдаемыми и фиксируемыми при моделировании конкретной системы S. Корреляционный анализ результатов моделирования сводится к оценке разброса значений η относительно среднего значения $\bar{y}$, т. е. к оценке силы корреляционной связи. Существование этих связей и их тесноту можно для схемы корреляционного анализа $y = M[\eta/\xi = x]$ выразить при наличии линейной связи между исследуемыми величинами и нормальности их совместного распределения с помощью коэффициента корреляции.

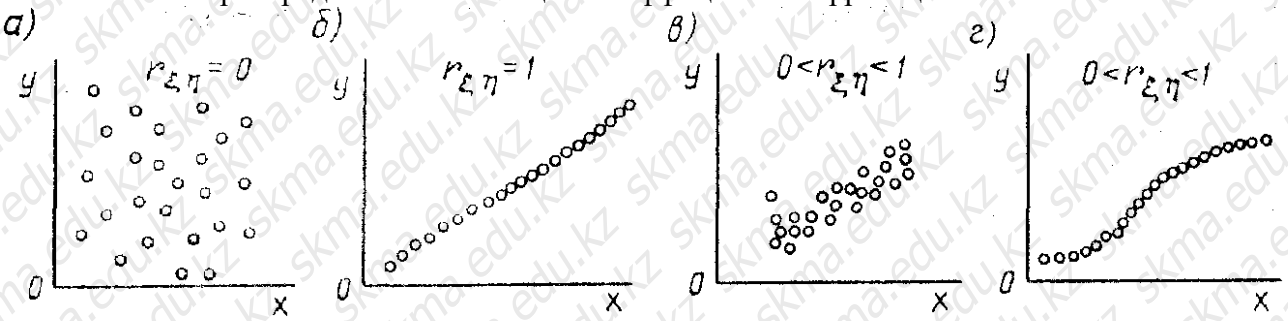


Рис.1. Различные случаи корреляции переменных

Для того чтобы оценить точность полученной при обработке результатов моделирования системы *S* оценки $r_{\xi\eta}$, целесообразно ввести в рассмотрение коэффициент

$w = \ln [(1+ r_{\xi\eta})/(1-r_{\xi\eta})]/2,$

причем *w* приближенно подчиняется гауссовскому распределению со средним значением и дисперсией:

$$\mu_w = \ln\left[\left(1+r_{\xi\eta}\right)/\left(1-r_{\xi\eta}\right)\right]/2$$

$$\sigma_w^2 = 1/\left(N-3\right)$$

При анализе результатов моделирования системы *S* важно отметить то обстоятельство, что даже если удалось установить тесную зависимость между двумя переменными, то отсюда еще непосредственно не следует их причинно-следственная взаимообусловленность. Возможна ситуация, когда случайные ξ и η стохастически зависимы, хотя причинно они являются для системы *S* независимыми. При статистическом моделировании наличие такой зависимости может иметь место, например, из-за коррелированности последовательностей псевдослучайных чисел, используемых для имитации событий, положенных в основу вычисления значений *x* и *y*.

1. Регрессионный анализ результатов моделирования.

Регрессионный анализ дает возможность построить модель, наилучшим образом соответствующую набору данных, полученных в ходе машинного эксперимента с системой *S*. Под наилучшим соответствием понимается минимизированная функция ошибки, являющаяся разностью между прогнозируемой моделью и данными

эксперимента. Такой функцией ошибки при регрессионном анализе служит сумма квадратов ошибок.

2. Дисперсионный анализ результатов моделирования.

При обработке и анализе результатов моделирования часто возникает задача сравнения средних выборок. Если в результате такой проверки окажется, что математическое ожидание совокупностей случайных переменных $\{y^{(1)}\}$, $\{y^{(2)}\}$, ..., $\{y^{(n)}\}$ отличается незначительно, то статистический материал, полученный в результате моделирования, можно считать однородным (в случае равенства двух первых моментов).

дисперсионный анализ позволяет вместо проверки нулевой гипотезы о равенстве средних значений выборок проводить при обработке результатов моделирования проверку нулевой гипотезы о тождественности выборочной и генеральной дисперсий.

Возможны и другие подходы к анализу и интерпретации результатов моделирования, но при этом необходимо помнить, что их эффективность существенно зависит от вида и свойств конкретной моделируемой систе

Регрессионный и корреляционный анализ широко используется при идентификация статических и динамических характеристик объектов.

Задача идентификации: задавшись видом уравнения регрессии (например, вида (2.2)), определить его неизвестные коэффициенты из условия, что заданная уравнением кривая будет с достаточной точностью описывать экспериментальную характеристику.

В качестве критерия соответствия при решении данной задачи берут критерий вида:

$$\min(\text{Fbi}),\ F(b_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(y_{эj} - y_{pj}\right)^2 \qquad (4.1)$$

где $y_{эj}$ – экспериментальное значение; y_{pj} – расчётное значение.

Для нахождения коэффициентов bi составляют уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = 0 \qquad (4.2)$$

Таким образом, получается система уравнений, решая которую можно определить b_i.

В конкретном случае, для выбора вида полинома используют графическое представление экспериментальной выборки, а также – априорные косвенные данные. Однако универсальных методик здесь нет.

Проиллюстрируем применение метода на примере для случая, когда уравнение регрессии выбрано в виде квадратного полинома: $\hat{y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_i$.

Линейная регрессия от одного параметра.

С помощью этого метода ищется минимум функции (4.1), имеющей вид суммы квадратов разностей между экспериментальными yi и расчетными:

$$\hat{y}_i = F(x_i) = b_0 + b_1 \cdot x_i : \qquad (4.3)$$

$$I(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - y_i\right]^2 \rightarrow \min \qquad (4.4)$$

Минимизация осуществляется варьированием коэффициентов b , т.е. ищем такие b0 и b1, при которых I(b) будет минимальной. Необходимым условием минимума функции $I(b_i)$ является выполнение условий:

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{b}_0} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - y_i] \cdot \frac{\partial F(x_i)}{\partial b_0} = 0 \qquad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{b}_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - y_i] \cdot \frac{\partial F(x_i)}{\partial b_1} = 0$$

Решение этой система из двух уравнений с двумя неизвестными позволяет найти выражения для b0 и b1, при которых I(b) будет минимальной.

С учетом того, что $\frac{\partial F(x_i)}{\partial \mathrm{b}_0} = x_i$ и $\frac{\partial F(x_i)}{\partial \mathrm{b}_1} = 1$ система уравнений принимает вид:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [(b_0 + b_1 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i] = 0 \qquad \text{и} \qquad 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [b_0 + b_1 \cdot x_i - y_i] = 0$$

или (система нормальных уравнений, решая которую находим b0 и b1):

$$\begin{aligned} b_0 \cdot \sum x_i + b_1 \cdot \sum x_i^2 &= \sum x_i \cdot y_i \\ b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum x_i &= \sum y_i \end{aligned} \qquad (4.6)$$

откуда

$$b_0 = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad (4.7) \text{ и}$$

$$b_1 = \frac{n \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad (4.8)$$

или проще сначала найти b1 , а затем $b_0 = \overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X}$ из этого уравнения видно, что между b1 и b0 существует корреляционная зависимость. Для оценки силы **линейной** связи можно вычислить выборочный коэффициент корреляции:

$$r = b_1 \cdot \sqrt{\frac{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n \cdot \sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}} \qquad (4.9)$$

Пример использования см. [1, стр. 130]

Метод множественной корреляции используется при идентификации объектом с несколькими входами (k - количество входов (факторов).. При k=1 – уравнение (2.1) график линии, k=2 – график плоскости, k=3 – график гиперповерхности.

Исходный статистический материал представлен в следующей таблице. В ней N строчек и k+2 столбцев.

Таблица 4.1

Исходные данные для получения математической модели с к - входами

№	X_0	X_1	X_2	X_3	…	Y
1	$x_{01}=1$	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	y_1
2	$x_{21}=1$	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	y_2
3	$x_{31}=1$	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	y_3
4	$x_{41}=1$	x_{41}	x_{42}	x_{43}	…	y_4
…	…	…	…	…	…	…
N	$x_{n1}=1$	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	y_n

X_0 – фиктивная переменная, равная 1, она вводится для удобства записи. Столбик X_1 - значения входа номер 1, столбик X_2 - значения входа номер 2 и т.д. столбик Y - значения выходов в каждом из N опытов.

В качестве базовой берется модель:

1 2 3 4 5 6 <- номера коэффициентов

$$\widehat{Y} = b_0 \cdot X_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_{11} \cdot X_3 + b_{22} \cdot X_4 + b_{12} \cdot X_5 \qquad (4.12)$$

Исходный статистический материал представлен в следующей таблице:

№	X_0	X_1	X_2	$X_3=$	$X_4=$	$X_5=$	Y
				X^2_1	X^2_2	X_1X_2	
1	1	x_{11}	x_{12}	$x_{11}x_{12}$	x^2_{11}	x^2_{12}	y_1
2	1	x_{21}	x_{22}	$x_{21}x_{22}$	x^2_{21}	x^2_{22}	y_2
3	1	x_{31}	x_{32}	$x_{31}x_{32}$	x^2_{31}	x^2_{32}	y_3
4	1	x_{41}	x_{42}	$x_{41}x_{42}$	x^2_{41}	x^2_{42}	y_4
…	…	…	…	…	…	…	…
n	1	x_{n1}	x_{n2}	$x_{n1}x_{n2}$	x^2_{n1}	x^2_{n2}	y_n

Здесь выделенная часть таблицы – реальный эксперимент, остальная часть таблицы заполняется путем вычислений.

Система нормальных уравнений, аналогично предыдущему случаю имеет вид:

$$b_0\sum X_0^2 + b_1\sum X_0X_1 + b_2\sum X_0X_2 + b_{11}\sum X_0X_1^2 + b_{22}\sum X_0X_2^2 + b_{12}\sum X_0X_1X_2 = \sum X_0Y$$

$$b_0\sum X_1X_0 + b_1\sum X_1^2 + b_2\sum X_1X_2 + b_{11}\sum X_1X_1^2 + b_{22}\sum X_1X_2^2 + b_{12}\sum X_1^2X_2 = \sum X_1Y \qquad (4.13)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_0\sum X_0X_1X_2 + b_1\sum X_1^2X_2 + b_2\sum X_1X_2^2 + b_{11}\sum X_1^3X_2 + b_{22}\sum X_1X_2^3 + b_{12}\sum X_1^2X_2^2 = \sum X_1X_2Y$$

Коэффициенты bi находятся решением этой системы, что **гораздо** проще делать в матричной форме.

Регрессионный анализ в матричной форме. (См.[1] стр.146)

Использование матричной формы записи значительно упрощает как запись, так и решение задачи определения коэффициентов уравнения регрессии. Введем следующие обозначения (см. таблицу 4.1).

1).Матрица независимых переменных X – она содержит исходный статистический материал (см. таблицу в предыдущей теме, кроме последнего столбца) в ней n – строк и k+1 столбец:

2).Матрица (вектор) наблюдений Y (вектор – столбец): в нем n – строк.

X и Y известны в результате проведенного пассивного эксперимента.

3).Матрица (вектор) искомых коэффициентов уравнения регрессии B (вектор – столбец): в нем k+1 – строк.

Целью является определение вектора B по известным X и Y по формуле (4.15).

Таблица 4.1

Элементы матричной записи при регрессионном анализе

$X=\begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \cdots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{0n} & x_{1n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$	$Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$	$B=\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdots \\ b_k \end{bmatrix}$	$(X^T\cdot X)^{-1}=\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k0} & c_{k1} & \cdots & c_{kk} \end{bmatrix}$
Матрица входов – факторы, независимые параметры	**Вектор выходов (наблюдений)**	**Вектор коэффициентов**	**Ковариационная матрица, матрица ошибок**

Матрицу $(X^T\cdot X)$ называют информационной матрицей (матрицей моментов), а $(X^T\cdot X)^{-1}$ матрицей ошибок или ковариационной матрицей.

В матричной форме система нормальных уравнений запишется:

$$X^TXB = X^TY \qquad (4.14)$$

Решение этого уравнения имеет вид (**хорошо запомните эту формулу**!):

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{4.15}$$

Уравнение (4.15) легко реализуется, например на Mathcad и широко применяется также и в методах планирования эксперимента. Однако вычисление вектора коэффициентов B иногда не может быть вычислено из-за **вырожденности** матрицы $(X^T \cdot X)$. Это может происходить, например, если элементы матрицы X очень сильно отличаются друг от друга. Например, когда один из элементов равен 0.00005, в другой 100000.0.

Для определения остаточной дисперсии определяют матрицу столбец

$$\hat{Y} = X \cdot B \tag{4.16}$$

Числитель остаточной дисперсии получают по формуле:

$$\left(Y - \hat{Y}\right)^T \cdot \left(Y - \hat{Y}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(Y - \hat{Y}\right)^2 \tag{4.17}$$

Рассмотрим пример применения регрессионного анализа для построения математической модели с тремя входами и одним выходом в виде (2.2):

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 + b_{11} \cdot X_1^2 + b_{22} \cdot X_2^2 + b_{33} \cdot X_3^2 + b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + b_{13} \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{23} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{123} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \tag{2.2}$$

Или, что то же, в виде:

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 \cdot X_1 + b_3 \cdot X_2 + b_4 \cdot X_3 + b_5 \cdot X_1^2 + b_6 \cdot X_2^2 + b_7 \cdot X_3^2 + b_8 \cdot X_1 \cdot X_2 + b_9 \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{10} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{11} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \tag{2.2A}$$

Исходные данные для построения математической модели приведены в таблице 4.2. На основе эксперимента в ней заполнены столбец 2 (значения выхода – Y) и столбцы 4-6 (значения входов X_1, X_2 и X_3). Эти значения выделены в таблице жирным шрифтом.

Столбец 3 заполнен значениями равными 1, а столбцы 7-13 значениями, вычисленными на основе значений столбцов 4-4. Проведено 20 опытов.

Таблица 4.2

Исходные данные для примера построения математической модели

№ оп	Y-Выход	Входы - X				Условные входы, рассчитанные на основе входов X						
		X_0	X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_1*X_2	X_1*X_3	X_2*X_3	$X_1X_2X_3$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1	**43,0**	1	**90**	**3**	**120**	8100	9	14400	270,000	10800,000	360,000	32400
2	**44,0**	1	**110**	**3**	**120**	12100	9	14400	330,000	13200,000	360,000	39600
3	**40,0**	1	**90**	**7**	**120**	8100	49	14400	630,000	10800,000	840,000	75600
4	**38,0**	1	**110**	**7**	**120**	12100	49	14400	770,000	13200,000	840,000	92400
5	**45,0**	1	**90**	**3**	**150**	8100	9	22500	270,000	13500,000	450,000	40500
6	**43,0**	1	**110**	**3**	**150**	12100	9	22500	330,000	16500,000	450,000	49500
7	**44,0**	1	**90**	**7**	**150**	8100	49	22500	630,000	13500,000	1050,000	94500
8	**42,0**	1	**110**	**7**	**150**	12100	49	22500	770,000	16500,000	1050,000	115500
9	**44,0**	1	**83,18**	**5,00**	**135,**	6918,9	25	18225	415,900	11229,300	675,000	56146,5

10	**41,0**	1	**116,8**	**5,00**	**135**	13642	25	18225	584,000	15768,000	675,000	78840
11	**43,0**	1	**100**	**1,64**	**135**	10000	2,6766	18225	163,600	13500,000	220,860	22086
12	**37,0**	1	**100**	**8,36**	**135**	10000	69,955	18225	836,400	13500,000	1129,140	112914
13	**45,0**	1	**100**	**5,00**	**109,7**	10000	25	12049,45	500,000	10977,000	548,850	54885
14	**48,0**	1	**100**	**5,00**	**160,3**	10000	25	25673,65	500,000	16023,000	801,150	80115
15	**47,0**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
16	**45,0**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
17	**46,5**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
18	**45,5**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
19	**46,7**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
20	**46,0**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500

Таким образом, заданы значения вектора Y(столбец 2) и матрицы X (столбцы 3-13) имеющие значения:

$Y^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	43	44	40	38	45	43	44	42	44	41	43	37	45	48	47	45	46.5	45.5	46.7	46

$X =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	90	3	120	8100	9	14400	270	10800	360	32400
2	1	110	3	120	12100	9	14400	330	13200	360	39600
3	1	90	7	120	8100	49	14400	630	10800	840	75600
4	1	110	7	120	12100	49	14400	770	13200	840	92400
5	1	90	3	150	8100	9	22500	270	13500	450	40500
6	1	110	3	150	12100	9	22500	330	16500	450	49500
7	1	90	7	150	8100	49	22500	630	13500	1050	94500
8	1	110	7	150	12100	49	22500	770	16500	1050	115500
9	1	83.18	5	135	6918.912	25	18225	415.9	11229.3	675	56146.5
10	1	116.8	5	135	13642.24	25	18225	584	15768	675	78840
11	1	100	1.636	135	10000	2.676	18225	163.6	13500	220.86	22086
12	1	100	8.364	135	10000	69.956	18225	836.4	13500	1129.14	112914
13	1	100	5	109.77	10000	25	12049.453	500	10977	548.85	54885
14	1	100	5	160.23	10000	25	25673.653	500	16023	801.15	80115
15	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
16	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
17	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
18	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
19	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
20	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500

Далее вычислив, например, в системе Mathcad по формуле (4.15) $B = (X^T X)^{-1} X^T Y$ получаем вектор одиннадцати значений коэффициентов B:

$B^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-207.44742	3.94528	19.67478	0.74521	-0.01372	-0.56344	0.00019	-0.18750	-0.00875	-0.09583	0.00125

Можно произвести проверку, результаты которой сведены в таблицу 4.3. Расчетное значение выхода $\hat{Y}$ можно получить, применив формулу (2.2А) или её матричный аналог в виде (4.16): $\hat{Y} = X \cdot B$. Полученную нами математическую модель можно считать адекватной, т.к. Значение критерия $R^2 = 0{,}9724$ достаточно близко к единице.

Таблица 4.1

Результат проверки адекватности математической модели

№ опыта	Входные переменные			Выход		Погрешность (ошибка)	
	X_1	X_2	X_3	Y	$\hat{Y}$	абсолютная	относительная %
1	120,00	3,00	120,00	43,000	43,5514	-0,5514	-1,2823
2	120,00	3,00	120,00	44,000	44,3277	-0,3277	-0,7448
3	120,00	7,00	120,00	40,000	40,2128	-0,2128	-0,5321
4	120,00	7,00	120,00	38,000	37,9892	0,0108	0,0285
5	150,00	3,00	150,00	45,000	45,3582	-0,3582	-0,7959
6	150,00	3,00	150,00	43,000	43,1345	-0,1345	-0,3127
7	150,00	7,00	150,00	44,000	44,0196	-0,0196	-0,0446
8	150,00	7,00	150,00	42,000	41,7959	0,2041	0,4858
9	135,00	5,00	135,00	44,000	43,4885	0,5115	1,1625
10	135,00	5,00	135,00	41,000	41,0205	-0,0205	-0,0499
11	135,00	1,64	135,00	43,000	42,3519	0,6481	1,5072
12	135,00	8,36	135,00	37,000	37,1570	-0,1570	-0,4243
13	109,77	5,00	109,77	45,000	44,5247	0,4753	1,0562
14	160,23	5,00	160,23	48,000	47,9842	0,0158	0,0329
15	135,00	5,00	135,00	47,000	46,1306	0,8694	1,8497
16	135,00	5,00	135,00	45,000	46,1306	-1,1306	-2,5125
17	135,00	5,00	135,00	46,500	46,1306	0,3694	0,7943
18	135,00	5,00	135,00	45,500	46,1306	-0,6306	-1,3860
19	135,00	5,00	135,00	46,700	46,1306	0,5694	1,2192
20	135,00	5,00	135,00	46,000	46,1306	-0,1306	-0,2840
					Суммарная ошибка =	1,0851E-07	-0,2330
					Среднее значение ошибки =	5,4256E-09	**-0,0117**
					Значение критерия Rквадрат =	**0,9724**	

Регрессионный метод идентификации линейных динамических систем (Метод наименьших квадратов)

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} + a_1\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_2\frac{d\ x(t)}{dt} + a_3x(t) = b\sin(ct)\,, \tag{4.21}$$

В уравнении заменим производную конечной разностью:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{x_{i+2} - 3x_{i+1} + 3x_i - x_{i-1}}{\Delta t^3}\,, \tag{4.22}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}\,, \tag{4.23}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\,, \tag{4.24}$$

Подставим выражения (4.22)-(4.24) в уравнение (4.21):

$$\frac{x_{i+2}-3x_{i+1}+3x_i-x_{i-1}}{\Delta t^3}+a_1\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{\Delta t^2}+a_2\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}+a_3x_i=u \quad , \tag{4.25}$$

Приведя подобные, получим:

$$\alpha_2=(1-a_1\Delta t) \qquad \alpha_3=\Delta t^3.$$

Рассматриваем систему, которая задана уравнением:

$$x_{i+2}=\alpha_0x_{i+1}+\alpha_1x_i+\alpha_2x_{i-1}+u$$

Минимизируемая функция имеет вид:

$$F=\sum_{j=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2}-(\alpha_0x_{i+1}+\alpha_1x_i+\alpha_2x_{i-1}+u))^2 \tag{4.28}$$

Запишем систему уравнений для нахождения α_i, для этого найдем частные производные:

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial\alpha_0}=-2\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2}-\alpha_0x_{i+1}-\alpha_1x_i-\alpha_2x_{i-1}-\alpha_3u)x_{i+1}=0\\ \frac{\partial F}{\partial\alpha_1}=-2\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2}-\alpha_0x_{i+1}-\alpha_1x_i-\alpha_2x_{i-1}-\alpha_3u)x_i=0\\ \frac{\partial F}{\partial\alpha_2}=-2\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2}-\alpha_0x_{i+1}-\alpha_1x_i-\alpha_2x_{i-1}-\alpha_3u)x_{i-1}=0\\ \frac{\partial F}{\partial\alpha_3}=-2\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_{i+2}-\alpha_0x_{i+1}-\alpha_1x_i-\alpha_2x_{i-1}-\alpha_3u)u_i=0\end{cases} \tag{4.29}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}x_{i+2}x_{i+1}-\alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}^2-\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}-\alpha_2\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}x_{i+1}-\alpha_3\sum_{i=1}^{n}ux_{i+1}=0\\ \sum_{i=1}^{n}x_{i+2}x_i-\alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}x_i-\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\alpha_2\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}x_i-\alpha_3\sum_{i=1}^{n}ux_i=0\\ \sum_{i=1}^{n}x_{i+2}x_{i-1}-\alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}x_{i-1}-\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i-1}-\alpha_2\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2x_{i+1}-\alpha_3\sum_{i=1}^{n}ux_{i-1}=0\\ \sum_{i=1}^{n}x_{i+2}u_i-\alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_{i+1}u_i-\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_iu_i-\alpha_2\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}u_i-\alpha_3\sum_{i=1}^{n}u_i^2=0\end{cases} \tag{4.30}$$

Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} x_{i+1} & \sum_{i=1}^{n} u_i x_{i+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} x_i & \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} x_{i-1} & \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 & \sum_{i=1}^{n} u_i x_{i-1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} u_i & \sum_{i=1}^{n} x_i u_i & \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} u_i & \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i+2} x_{i+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+2} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+2} x_{i-1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+2} u_i \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$X \cdot \alpha = y \Rightarrow \alpha = X^{-1} \cdot y. \quad (4.32)$$

По полученным α найдем коэффициенты ai

$$a_1 = \frac{1-\alpha_2}{\Delta t}; \quad a_2 = \frac{2+\alpha_2-\alpha_0}{\Delta t^2}; \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-1}{\Delta t^3}.$$

Контрольные вопросы

1 Корреляционный анализ результатов моделирования;
2 Регрессионный анализ результатов моделирования;
3 Дисперсионный анализ результатов моделирования;
4 Линейная регрессия от одного параметра;
5 Регрессионный анализ в матричной форме;
6 Регрессионный метод идентификации линейных динамических систем.

Литература

Основная литература

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 1985. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.

Дополнительная литература

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 1997

Лекция 5 Статические и динамические модели в форме уравнения регрессии (ч.3)

Цель: Рассмотреть элементы теории дисперсионного анализа, статистической оценки параметров распределения случайных величин и проверки статистических гипотез, используемых при практическом решении задач идентификации.

Тезисы

Перечислим кратко назначение методов анализа, применяемых при идентификации.

- **Дисперсионный** анализ применяется для исследования влияния одной или нескольких качественных переменных (факторов) на одну зависимую количественную переменную (отклик).
- **Анализ временных рядов** применим к одиночным или связанным временным рядам и позволяет выделять различные формы периодичности и взаимовлияния временных процессов, а также осуществлять прогнозирование будущего поведения временного ряда.
- **Регрессионные процедуры** позволяют рассчитать модель, описываемую некоторым уравнением и отражающую функциональную зависимость между экспериментальными количественными переменными, а также проверяют гипотезу об адекватности модели экспериментальным данным. По полученным результатам можно оценить природу и степень зависимости переменных и предсказать новые значения зависимой переменной.
- **Корреляционный анализ** – это группа статистических методов, направленная на выявление и математическое представление структурных зависимостей между выборками.
- **Кластерный анализ** осуществляет разбиение объектов на заданное число удаленных друг от друга классов, а также строит дерево классификаций объектов посредством иерархического объединения их в группы (кластеры).
- Основной задачей **факторного анализа** является нахождение в многомерном пространстве первичных переменных (значения которых регистрируются в эксперименте), сокращенной системы вторичных переменных (факторов). Метод факторного анализа первоначально был разработан в психологии с целью выделения отдельных компонентов человеческого интеллекта из многомерных данных по измерению различных проявлений умственных способностей.
- Методы **контроля качества** предназначены для контроля выпускаемой продукции с целью выявления нарушений и узких мест в организации производства и в технологических процессах, ведущих к снижению качества продукции.

Дисперсионный анализ (от латинского Dispersio – рассеивание / на английском Analysis Of Variance - ANOVA) применяется для исследования влияния одной или нескольких качественных переменных (факторов) на одну зависимую количественную переменную (отклик).

Для того чтобы определить значимо ли влияние данного фактора необходимо оценить значимость соответствующей выборочной дисперсии в соответствии с дисперсией воспроизводимости, обусловленной случайными факторами.

Предположим, что результат эксперимента зависит от некоторого одиночного фактора A, который принимает n различных значений (n-количество серий опытов). Для

каждой серии опытов проводится m повторных наблюдений, результаты которых можно записать в следующем виде:

$Y_{11}\ Y_{12}\ Y_{13}\ ...\ Y_{1m}$
$Y_{21}\ Y_{22}\ Y_{23}\ ...\ Y_{2m}$
$Y_{31}\ Y_{32}\ Y_{33}\ ...\ Y_{3m}$
... ...
$Y_{n1}\ Y_{n2}\ Y_{n3}\ ...\ Y_{nm}$

На основе полученных статистических данных требуется проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий для каждой конкретной серии. Если проверяемая гипотеза верна, то средние арифметические значения для всех серий практически не отличаются друг от друга, в противном случае предполагаемая гипотеза должна быть отвергнута.

Обозначим через $\overline{Y}_i$ среднее значение i-й серии опытов, а через $\overline{Y}$ общее среднее значение для всех наблюдений:

$$\overline{Y}_j = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} Y_{ji} \qquad (5.1)$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{m \cdot n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} Y_{ji}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (Y_{ij} - \overline{Y})^2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2 \right\} + \left\{ m \cdot \sum_{i=1}^{n} (\overline{Y}_i - \overline{Y})^2 \right\} \qquad (5.2)$$

Сущность дисперсионного анализа состоит в разложении суммы квадратов отклонений отдельных Y_{ij} от общего среднего на две суммы:

Q - определяет общее отклонение значения каждого опыта (Y_{ij}) от среднего;

QA - характеризует рассеяние, вызванное фактором А (выражение во вторых фигурных скобках);

Qост - характеризует рассеяние вызванное случайными помехами (выражение в первых фигурных скобках).

Разделив суммы квадратов отклонений на соответствующие степени свободы получим следующие дисперсии:

$$\sigma^2 = Q/f$$
$$\sigma_A^2 = Q_A/f_1 \qquad (5.3)$$
$$\sigma_{ОСТ}^2 = Q_{ост}/f^2$$

Число степеней свободы $f = m \cdot n - 1$ $f1 = n - 1$ $f2 = n \cdot (m-1)$

Проведение дисперсионного анализа состоит в сравнении оценок σ_A^2 и $\sigma_{ОСТ}^2$. Если гипотеза о том, что математические ожидания для каждой серии равны, верна, то σ_A^2 не должна существенно превышать $\sigma_{ОСТ}^2$, что проверяется по критерию Фишера:

$$F = \sigma_A^2 / \sigma_{ОСТ}^2 \qquad (5.4)$$

Если $F < F_{кр}$, то различие между σ_A^2 и $\sigma_{ОСТ}^2$ можно считать несущественным, т.е. влияние фактора А сравнимо с влиянием случайных помех.

Если $F > F_{кр}$, то различие между σ_A^2 и $\sigma_{ОСТ}^2$ существенно, т.е. фактор А оказывает влияние на выходную величину.

Значение Fкр определяют по квантилям распределения Фишера, при уровне значимости α ("альфа") и степеням свободы f1 и f2:

$F_{кр} = f(\alpha, f1, f2)$

Статистическая оценка параметров распределения случайных величин Проверка гипотез

Статистическая гипотеза (statistical hypothesys) — это определённое предположение о распределении вероятностей, лежащем в основе наблюдаемой выборки данных.

Проверка статистической гипотезы (testing statistical hypotheses) — это процесс принятия решения о том, противоречит ли рассматриваемая статистическая гипотеза наблюдаемой выборке данных. Статистический тест или статистический критерий — строгое математическое правило, по которому принимается или отвергается статистическая гипотеза.

Принятие или отклонение гипотезы H_0 по случайной выборке соответствует истине с некоторой вероятностью и, соответственно, возможны два рода ошибок. Ошибка первого рода возникает с вероятностью α тогда, когда отвергается верная гипотеза H_0 и принимается конкурирующая гипотеза H_1. Ошибка второго рода возникает с вероятностью β в том случае, когда принимается неверная гипотеза H_0, в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Доверительная вероятность – это вероятность не совершить ошибку первого рода и принять верную гипотезу H_0. Вероятность отвергнуть ложную гипотезу H_0 называется мощностью критерия. Следовательно, при проверке гипотезы возможны четыре варианта исходов, таблица. 5.1.

Таблица 5.1

Четыре варианта исходов

Гипотеза H_0	Решение	Вероятность	Примечание
Верна	Принимается	$1-\alpha$	Доверительная вероятность
	Отвергается	α	Вероятность ошибки первого рода
Неверна	Принимается	β	Вероятность ошибки второго рода
	Отвергается	$1-\beta$	Мощность критерия

Например, рассмотрим случай, когда некоторая несмещенная оценка параметра θ вычислена по выборке объема *n*, и эта оценка имеет плотность распределения *f*(θ), рисунок. 5.1.

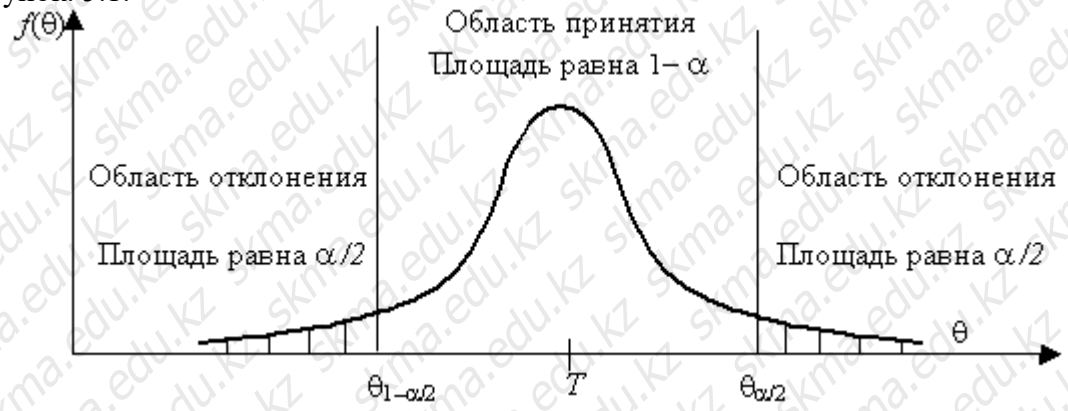


Рисунок 5.1 - Области и отклонения гипотезы

Предположим, что истинное значение оцениваемого параметра равно T. Если рассматривать гипотезу H_0 о равенстве $\theta = T$, то насколько велико должно быть различие между θ и T, чтобы эту гипотезу отвергнуть. Ответить на данный вопрос можно в статистическом смысле, рассматривая вероятность достижения некоторой заданной разности между θ и T на основе выборочного распределения параметра θ .

Если предположить, например, что истинное значение параметра в действительности равно $T+d$, то согласно гипотезе H_0 о равенстве $\theta = T$ – вероятность того, что оценка параметра θ попадет в область принятия гипотезы, составит β , рисунок 5.2.

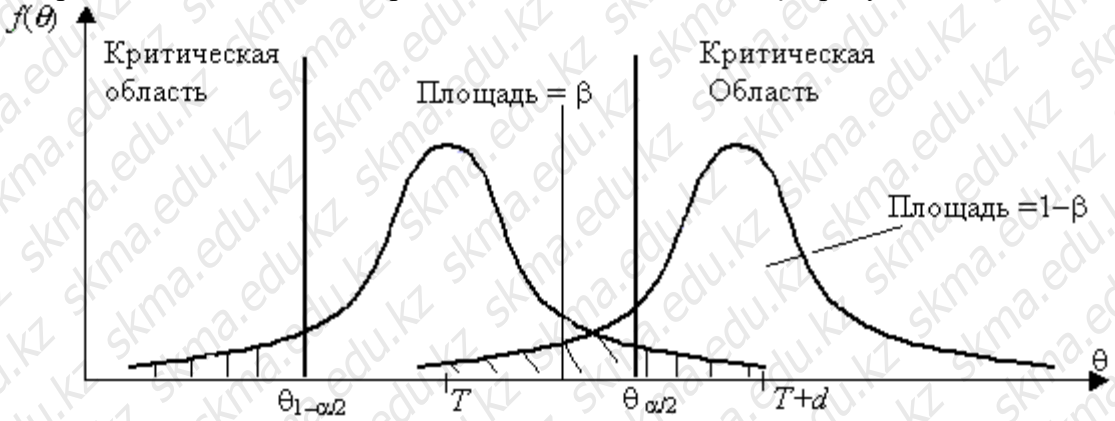


Рисунок 5.2 – Распределение областей

При заданном объеме выборки вероятность совершения ошибки первого рода можно уменьшить, снижая уровень значимости α . Однако при этом увеличивается вероятность ошибки второго рода β (снижается мощность критерия). Аналогичные рассуждения можно провести для случая, когда истинное значение параметра равно $T - d$.

При выборе уровня значимости необходимо учитывать мощность критерия при альтернативной гипотезе. Иногда большая мощность критерия оказывается существеннее малого уровня значимости, и его значение выбирают относительно большим, например 0,2. Такой выбор оправдан, если последствия ошибок второго рода более существенны, чем ошибок первого рода. Например, если отвергнуто правильное решение "продолжить работу пользователей с текущими паролями", то ошибка первого рода приведет к некоторой задержке в нормальном функционировании системы, связанной со сменой паролей. Если же принято решения не менять пароли, несмотря на опасность несанкционированного доступа посторонних лиц к информации, то эта ошибка повлечет более серьезные последствия.

Рассмотрим практическую методику использования метода статистической оценка параметров распределения. Состоятельные и несмещенные оценки основных параметров распределения случайной величины (СВ) (математического ожидания M_X и дисперсии σ_X^2) могут быть получены по формулам:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (5.5)$$

$$\sigma_X{}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \qquad (5.6)$$

где n - объем выборки.

Оценку коэффициента корреляции между случайными величины X и Y определяют по формуле:

$$R_{XY} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (5.7)$$

Так как оценки (5.5) - (5.6) определяют по выборке конечного объема, возникает вопрос об их статистической достоверности и точности.

Рассмотрим случай, когда величина X имеет нормальный закон распределения с плотностью вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(X - M_x)^2}{2 * \sigma_X^2}} \quad (5.8)$$

Доверительный интервал для математического ожидания:

$\bar{X} - \varepsilon, \bar{X} + \varepsilon$, включающий M_x с вероятностью 1- α, находят из условия:

$$P[\bar{X} - \varepsilon < M_X < \bar{X} + \varepsilon] = 1 - \alpha$$

которое можно представить в виде:

$$P[|X - M_X| < \theta] = 1 - \alpha \quad (5.9)$$

Введем параметр:

$$t = [(\bar{X} - M_x)/\sigma_X] \cdot \sqrt{n} \quad (5.10)$$

имеющий t-распределение Стьюдента с v = n - 1 степенями свободы. Тогда равенство (3.4) перепишется в виде:

$$P = \left[|\bar{X} - M_X| < t(\alpha, v) \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha \quad (5.11)$$

где t(a, v) определяют по таблице распределения Стьюдента при вероятности α и степени свободы v = n - 1. Доверительный интервал для Mx, соответствующий доверительной вероятности 1 - α, есть:

$$\left[\bar{X} - \frac{t(\alpha, v) \cdot \sigma_X}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{t(\alpha, v) \cdot \sigma_X}{\sqrt{n}} \right] \quad (5.12)$$

Чтобы определить доверительный интервал для дисперсии, необходимо найти границы интервала σ12и σ22, удовлетворяющие равенству:

$$P[\sigma 12 < \sigma X2 < \sigma 22] = 1 - \alpha \quad (5.13)$$

Для нормально распределенного X известен закон распределения величины со степенями свободы v = n - 1:

$$\chi 2 = (n-1) \cdot \sigma X2 / \sigma 2, \quad (5.14)$$

где σX2-выборочная дисперсия, σ2-истинное значение σX2

После подстановки (5.14) в (5.13), при условии, что:

P[σX2<σ12]=P[σX2>σ22] = α/2, получим:

P[χ2(1-α/2, v) < (n-1)·σX2/σ2 < χ2(α/2, v)] = 1 - α.

Величину χ2(1-α/2,v)=(n-1)·σX2/σ22находят по таблице распределения Пирсона при вероятности 1-α/2 и числе степеней свободы

v=n-1, а χ2(α/2, v)=(n-1)·σX2/σ□2определяют при вероятности α/2 и числе степеней свободы v = n - 1.

Следовательно, доверительный интервал для дисперсии σX2, соответствующий доверительной вероятности 1 - α, есть:

$$\left[\frac{(n-1)\cdot\sigma_X{}^2}{\chi^2(\alpha/2,v)};\frac{(n-1)\cdot\sigma_X{}^2}{\chi^2(1-\alpha/2,v)}\right] \qquad (5.14)$$

Алгоритм проверки статистических гипотез. Понятие статистической гипотезы означает предположение о виде распределения СВ или о некотором параметре ее распределения. Проверка гипотезы заключается в сопоставлении определенного статистического показателя (критерия значимости), вычисленного по данной выборке, с критерием значимости, найденным теоретически при условии, что проверяемая гипотеза верна.

1)При проверке гипотезы о том, что Mx = C, в качестве критерия используют величину:

$$t = (\overline{X} - C)\cdot\sqrt{n}/\sigma_X \qquad (5.15)$$

Эта величина при условии, что гипотеза верна, имеет t-распределение Стьюдента с v = n - 1 степенями свободы. Если вычисленное по соотношению (5.15) значение t по абсолютной величине не превышает критического значения $t_{кр}$=t(α, v), найденного по таблице t-распределения при уровне значимости α и числе степеней свободы v, то гипотеза о том, что Mx=C принимается, в противном случае она отвергается.

2)Проверку гипотезы о равенстве двух математических ожиданий Mx = My, вычисленных по двум выборкам случайных величин X и Y объемами n1 и n2 проводят по критерию:

$$t = (X-Y)/\sigma X\text{-}Y \qquad (5.16)$$

$$\sigma_{X\text{-}Y} = \sqrt{\frac{(n_1+n_2)\cdot[(n_1-1)\cdot\sigma_X{}^2+(n_2-1)\cdot\sigma_Y{}^2]}{n_1\cdot n_2\cdot(n_1+n_2-2)}} \qquad (5.17)$$

Критерий t имеет t-распределение Стьюдента с числом степеней свободы v = n1 + n2 - 2. Проверку гипотезы проверяют также, как и в предыдущем случае, т.е. при |t|<=tкр гипотеза принимается, а при $|t|>t_{кр}$ отвергается.

3)Проверку гипотезы о равенстве дисперсий двух СВ X и Y, оценки которых σX2 и σY2 определены по двум выборкам объемом n1 и n2, проводят с использованием критерия:

$$F = \sigma X2/\sigma Y2, \qquad (5.18)$$

который имеет распределение Фишера со степенями свободы v1 = n1 - 1 для числителя и v2 = n2 - 1 для знаменателя. Полученное по критерию (5.18) значение сравнивают с критическим Fкр=F(α, v1, v2). Если F<Fkp нет оснований для того, чтобы нулевая гипотеза была отвергнута, в противном случае принимаем, что на генеральной совокупности σX2>σY2.

Контрольные вопросы

1 Элементы теории дисперсионного анализа;
2 Статистическая оценка параметров распределения случайных величин;
3 Проверка статистических гипотез, используемых при практическом решении задач идентификации;
4 Алгоритм проверки статистических гипотез.

Литература

Основная литература

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 1985. -327с.
2. Рузинов Л.П. Статистические методы оптимизации химических процессов. -М.: Химия, 1972

Дополнительная литература

3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.

Лекция 6 Статические и динамические модели в форме уравнения регрессии (ч. 4)

Цель: Рассмотреть методы планирования эксперимента, используемые при определении статические и динамические модели объектов в форме управления регрессии

Тезисы

Основные недостатки классического регрессионного анализа: корреляция между коэффициентами; трудности в оценке ошибки; необходимость проведения большого количества опытов; трудности при определении коэффициентов b_i вручную.

В основе методов статистического плана эксперимента (ПЭ) лежит использование упорядоченного плана расположения точек в факторном пространстве и использование новой безразмерной системы координат. Использование методов ПЭ позволяет устранить практически все недостатки регрессионного анализа.

Основные понятия на которые надо обратить внимание: факторы (входы, воздействия – они не должны быть коррелированны), уровни (дискретные значения, принимаемые факторами), матрица ПЭ (собственно план), методы математической обработки.

Основные принципы планирования эксперимента (ПЭ).

Пассивным экспериментом называют эксперимент, в котором регистрация входных и выходных данных осуществляется в рабочем режиме, не используя дополнительных вмешательств. Он применяется тогда, когда структура модели хорошо известна и ее адекватность не вызывает сомнений (когда решаются задачи параметрической идентификации).

Фиксированный набор уровней называется состоянием факторов.

План – это программа проведения эксперимента, позволяющая использовать все факторы на всех уровнях. Если план содержит всевозможные сочетания факторов и уровней, то такой план называют полным.

Если p – общее количество уровней; к – количество факторов, то полный план эксперимента будет включать в себя следующее количество экспериментов:

$N = p^{\kappa}$.

В методах ПЭ используются кодированные (безразмерные) параметров. Они соответствуют переносу начала координат в точку z_j^0 - центр плана (основной уровень).

$$z_j^0 = \frac{z_j^{\max} + z_j^{\min}}{2},\ j = 1,2..k. \qquad (6.1)$$

Интервал варьирования по оси z_j определяется по формуле:

$$\Delta z_j = \frac{z_j^{\max} - z_j^{\min}}{2} \qquad (6.2).$$

Для перехода от физических (натуральных) переменных z_j к безразмерным координатам x_j используют выражение:

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j} \qquad (6.3),$$

а для обратного перехода

$$z_j = z_j^0 + x_j \cdot \Delta z_j \qquad (6.5).$$

Например, пусть $z_1^{max} = 200°C$ $z_1^{min} = 100°C$, тогда

$\Delta z_1 = 50°C$, $z_1^0 = 150°C$ $x_1 = \frac{z_1 - z_1^0}{\Delta z_1}$,

при $z_1 = z_1^{min} = 100°C$ $x_1 = \frac{100 - 150}{50} = -1$.

Для безразмерных переменных в ПФЭ верхний уровень равен +1, а нижний –1, координаты центра плана равны нулю. В некоторых планах (см. ниже) используются безразмерные значения факторов $x_j = \pm\alpha$, соответствующие им значения в натуральных координатах находят по выражению $z_j = z_j^0 + \alpha \cdot \Delta z_j$.

В приведенном примере при $\alpha = 1.4; z_1 = 150 + 1.4 \cdot 50 = 220°C$

Отметим, что введение безразмерной системы координат необходимо только для облегчения обработки результатов вручную. Если использовать для поиска решения матричное уравнение (4.15), то сразу получаем решение с найденными коэффициентами в натуральном (физическом) масштабе.

В полном факторном эксперименте (ПФЭ) обеспечивается проведение опытов при всех возможных сочетаниях значений факторов на всех уровнях варьирования, используются значения факторов только равные +1 и –1.

Необходимое число опытов ПФЭ: $N = (N_{УРОВНЕЙ})^K$, (6.6)

чаще используют $N_{УРОВНЕЙ} = 2$, тогда необходимое количество опытов см. таблицу 6.1):

Таблица 6.1

Необходимое количество опытов

Количество факторов –k	3	4	5	6	7
Количество опытов – N	8	16	32	64	128
Кол. коэф. линейной модели - L	4	5	6	7	8
Число степеней свободы - f	4	11	26	57	120

Матрица ПФЭ для 3-х факторов x_1 x_2 x_3 в безразмерном виде (y – выход, результат проведения опыта) имеет вид (см. таблицу. 6.2.):

Таблица 6.2

Матрица ПФЭ для 3-х факторов

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	y
1	+1	–1	–1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	y_2

3	+1	–1	+1	–1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	y_5
6	+1	+1	–1	+1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	y_8

План эксперимента понимается так. Например, для первого опыта:

$z_1 = z_1^{\min} \quad z_2 = z_2^{\min} \quad z_3 = z_3^{\min}$, результат опыта y_1, для второго опыта:

$z_1 = z_1^{\max} \quad z_2 = z_2^{\min} \quad z_3 = z_3^{\min}$, результат опыта y_2 и т.д.

Столбец x_0 соответствует т.н. – фиктивной переменной $x_0 = +1$, он необходим только для удобства вывода приведенных ниже выражений. Вычисление коэффициентов уравнения регрессии bi производят на основе известного выражения (5.14) $B = (X^T X)^{-1} X^T Y$. Однако приведенная в таблице матрица обладает рядом свойств, значительно упрощающих расчеты вручную.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ui} \cdot x_{ji} = 0; u \neq j; u, j = 0,1,...,k \text{ - свойство ортогональности;} \quad (6.7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0; j = 1,...,k; j \neq 0 \quad (6.8)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 = N; j = 0,1,...,k; \quad (6.9)$$

Ортогональность матрицы планирования приводит к диагональности матрицы $(X^T X)$, в результате чего легко вручную находится $(X^T X)^{-1}$ (см. стр. 162 в [1].), а коэффициенты уравнения регрессии b_i находятся по формуле:

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ji} \cdot y_i \quad (6.10)$$

(напомним, что для можно сразу использовать уравнение (4.15).

Матрица ПЭ, приведенная в таблице 6.2. позволяет определить коэффициенты линейного уравнения регрессии:

$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$.

В принципе имеющиеся степени свободы позволяют определить коэффициенты уравнения регрессии с учетом эффектов взаимодействия вида:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3 \quad (6.11)$$

Для этого матрицу ПЭ (см. таблицу 6.2.) надо дополнить фиктивными столбиками, содержащими информацию для $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_2 x_3$ и $x_1 x_2 x_3$ (см. таблицу. 6.3.).

Например $x_1 \cdot x_2 = x_1x_2 = (-1 \cdot -1) = +1$. При этом дополнительных опытов проводить не надо.

Таблица 6.3
План ПФЭ

№ оп.	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

Значимость коэффициентов и адекватность уравнения регрессии определяют, как описано выше. После того, как определен окончательный вид уравнения регрессии можно перейти от кодированных переменных к физическим переменным используя уравнения (6.5).

Дробный факторный эксперимент.

Другое название - метод дробных реплик. С увеличением количества факторов в ПФЭ резко возрастает число опытов и число степеней свободы. (см. таблицу 6.1.). Т.е. количество опытов в ПФЭ обычно превосходит число определяемых коэффициентов, т.е. ПФЭ обладает избыточностью опытов. В дробном факторном эксперименте (ДФЭ) в отличие от ПФЭ используются не все возможные сочетания уровней изучаемых факторов. Некоторые их сочетания пропускаются. Сокращение перебора уровней всегда приводит к потере части исходной информации. План ДФЭ строится так, чтобы обеспечить получение линейной модели, при этом необходимо, чтобы матрица планирования сохранила свойство ортогональности. Рассматриваемый метод заключается в том, что для получения математического описания используется часть ПФЭ. Например, при 4 факторах за основу берется план для трех факторов, а для четвертого фактора используется план, соответствующий одному из столбцов содержащих эффекты взаимодействия (столбцы 6-9 в таблице 6.3.). Если нет сведений о значимости взаимодействий факторов, то лучше выбрать столбец 9, соответствующий тройным взаимодействиям $x_4 = x_1x_2x_3$ или $x_4 = -x_1x_2x_3$, такие соотношения называют генерирующими соотношениями, так как они генерируют (создают) дробную реплику. Умножая обе части генерирующего соотношения на x_4 получаем $I = x_1x_2x_3x_4$, называемое определяющим контрастом. Эксперимент проводят по плану (таблица 6.4):

Таблица 6.4
План ДФЭ

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	y
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	+1	–1	–1	–1	–1	y_1
2	+1	+1	–1	–1	+1	y_2

3	+1	–1	+1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	–1	–1	y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	y_8

По этому плану, например, для первого опыта:

$z_1 = z_1^{\min}$ $z_2 = z_2^{\min}$ $z_3 = z_3^{\min}$ $z_4 = z_4^{\min}$, результат опыта y_1.

План содержит половину опытов ПФЭ 24 и носит название полуреплики. Используют также ¼ реплики, ⅛ реплики и т.д. Обозначаются ДПЭ в виде 2k-p, где k – количество факторов, p –число дробных реплик, в нашем примере это 24-1. Расчет коэффициентов регрессии, проверка их значимости производят по тем же формулам, что и для ПФЭ.

Ортогональное планирования эксперимента

Другое название - планы Бокса-Уилсона. Для построения ортогональных центральных композиционных планов (ЦКП) используется так называемое звездное плечо α (плечо звездных точек). Это опыты, которые проводятся дополнительно, например, к плану ПФЭ (при k<5) или к дробному плану(при k≥5). В таблице 6.5. приведено такое дополнение к плану в таблице 6.2.

Таблица 6.5

Дополнение к плану в таблице 6.2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	y	
9	+1	–α	0	0	y9	Звездные точки (2k точек)
10	+1	+α	0	0	y10	
11	+1	0	–α	0	y11	
12	+1	0	+α	0	y12	
13	+1	0	0	–α	y13	
14	+1	0	0	+α	y14	
15	+1	0	0	0	Y15	Центр плана N0 точек

Общее количество опытов определяется по формуле:

$$N = 2^k + 2 \cdot k + N_0 \text{ (при k<5)} \qquad (6.12)$$

Обычно звездные точки и точку в центре добавляют, если при ПФЭ не удается получить адекватную математическую модель и при исследовании области, близкой к экстремуму. При описании такой области наиболее широко используют полиномы второго порядка. ЦКП неортогональны, но легко сводятся к ортогональным (ОЦКП), путем выбора α. Значения α приведены в таблице 6.6. ([1]., стр.181, 183)

Таблица 6.6

N_0	k=2	k=3	k=4
1	α=1,000	α=1,476	α=2,000
2	α=1,160	α=1,650	α=2,164
3	α=1,317	α=1,831	α=2,390

Матрица планирования для ОЦКП, используемая для расчета коэффициентов дополняется столбцами x_1^*, x_2^*…Например при k=2 и N0=1 получаем матрицу, приведенную в таблице 6.7. В таблице $x_j^* = x_j^2 - \bar{x}_j^2 = x_j^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2$, введено для получения ортогональной матрицы.

Таблица 6.7

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^*	x_2^*	y
1	2	3	4	6	8	9	10
1	+1	+1	+1	+1	+0,333	+0,333	y_1
2	+1	+1	–1	–1	+0,333	+0,333	y_2
3	+1	–1	–1	+1	+0,333	+0,333	y_3
4	+1	–1	+1	–1	+0,333	+0,333	y_4
5	+1	+1	0	0	+0,333	–0,667	y_5
6	+1	–1	0	0	+0,333	–0,667	y_6
7	+1	0	+1	0	–0,667	+0,333	y_7
8	+1	0	–1	0	–0,667	+0,333	y_8
9	+1	0	0	0	–0,667	–0,667	y_9

Благодаря ортогональности матрицы планирования все коэффициенты рассчитываются независимо друг от друга по формуле:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2}, \qquad (6.13),$$

а дисперсии коэффициентов равны:

$$s_{b_j}^2 = \frac{s_{ВОСПР}^2}{\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2} \qquad (6.14)$$

В результате расчета по матрице в таблице 6.7 уравнение регрессии в ОЦКП получается в виде:

$$\hat{Y} = b_0^* + b_1x_1 + b_2x_2 + ...b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + ... + b_{(k-1)k}x_{k-1}x_k + ... + b_{11}x_1^* + ... + b_{kk}x_k^*$$

Чтобы перейти к обычной записи b_0 определяют по выражению:

$$b_0 = b_0^* - b_{11}\bar{x}_1^2 - ... - b_{kk}\bar{x}_k^2$$

и оценивают с дисперсией: $s_{b_0}^2 = s_{b_0^*}^2 + (\bar{x}_1^2)^2 s_{b_{11}}^2 + ... + (\bar{x}_k^2)^2 s_{b_{kk}}^2$

Зная дисперсию воспроизводимости, проверяют значимость коэффициентов и адекватность уравнения регрессии:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + ..b_kx_k + b_{12}x_1x_2 + ... + b_{(k-1)k}x_{k-1}x_k + ... + b_{11}x_1^2 + ... + b_{kk}x_k^2$$

Адекватность проверяют по критерию Фишера, составляя отношение дисперсий: $F_{PAC} = \frac{S^2_{АД}}{S^2_{ВОСПР}}$, условие адекватности $F_{PAC} < F_{1-p}(f_1, f_2)$, где

$f_1 = f_{АД} = N - L$ $f_2 = f_{ВОСПР}$.

Значимость коэффициентов определяют по формуле:

$t_j = \frac{|b_j|}{S_{b_i}}$, если $t_j > t_{ТАБ}(f_2)$, то b_j считается значимым.

Т.к. b_j в ОЦКП определяются с разной точностью, то (при k<5):

$$s_{b_0} = \frac{s_{ВОСПР}}{\sqrt{N}},$$

$$s_{b_j} = \frac{s_{ВОСПР}}{\sqrt{2^k + 2\alpha^2}}, \ j = 1,2,...,k$$

$$s_{b_{uj}} = \frac{s_{ВОСПР}}{\sqrt{2^k}} \ u, j = 1,2,..,k, \ u \neq j$$

$$s_{b_{jj}} = \frac{s_{ВОСПР}}{\sqrt{2^k(1-\bar{x}_1^2)^2 + 2(\alpha^2 - \bar{x}_1^2)^2 + (N_0 + 2k - 2)(\bar{x}_1^2)^2}}, \ j = 1,2,...,k$$

Ротатабльное планирования эксперимента (РПЭ).

Другое название - планы Бокса-Хантера. Ортогональные планы не обладают свойством ротатабельности. РПЭ позволяет получать более точное математическое описание по сравнению с ЦКП. Это достигается увеличением числа опытов в центре плана и специальным выбором звездного плеча **α**. Характеристики РПЭ приведены в табл. 6.8.

Таблица 6.8.
Расчет числа опытов

факторов - **k**	Количество опытов				Значение **α**
	ПФЭ	в звездных точках	в центре плана – N_0	всего - N	
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,680
4	16	8	7	31	2,000
5	32	10	10	52	2,378

Коэффициенты уравнения регрессии коррелированны между собой, поэтому их можно найти, используя матричное выражение (5.14)

$B = (X^T X)^{-1} X^T Y$, т.е. надо выполнить обращение матрицы $(X^T X)$. Однако из-за особого вида этой матрицы при РПЭ можно получить аналитические выражения для расчета коэффициентов уравнения регрессии и их дисперсий.

Они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= a_1\sum_{i=1}^{N} y_i - a_2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i \quad b_j = a_3\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i;\ \mathrm{j} = 1,2,...,\mathrm{k} \\ b_{uj} &= a_4\sum_{i=1}^{N} x_{ui} x_{ji} y_i;\ \mathrm{u} \neq \mathrm{j};\ \ \mathrm{j,u} = 1,2,...,\mathrm{k} \\ b_{jj} &= a_5\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i + a_6\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^2 y_i + a_7\sum_{i=1}^{N} y_i \end{aligned}\right\} \qquad (6.15)$$

$$s_{b_0}^2 = a_1 s_y^2 \quad s_{b_j}^2 = a_3 s_y^2 \quad s_{b_{uj}}^2 = a_4 s_y^2 \quad s_{b_{jj}}^2 = (a_5 + a_6) s_y^2, \qquad (6.66)$$

где значения a_i приведены в таблице в таблице 6.9.

Таблица 6.9.

k	N	N_0	α	a_1	a_2	A_3	a_4	a_5	a_6	a_7
2	13	5	1,412	0,2000	0,1000	0,1250	0,2500	0,1251	0,0187	0,1000
3	20	6	1,682	0,1663	0,0568	0,0732	0,1250	0,0625	0,0069	0,0568
4	31	7	2,000	0,1428	0,0357	0,0417	0,0625	0,0312	0,0037	0,0357
5	32	6	2,000	0,1591	0,0341	0,0417	0,0625	0,0312	0,0028	0,0341

Контрольные вопросы

1 Основные принципы планирования эксперимента;
2 Дробный факторный эксперимент;
3 Ортогональное планирования эксперимента.

Литература

Основная литература

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 1985. -327с.
2. Инков А.М. Моделирование и идентификация объектов управления. Методические указания к выполнению лабораторных работ для студентов спец. 050702. Шымкент, ЮКГУ, 2010 г., -78 с.

Дополнительная литература

3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.
4. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009

Лекция 7 Общие задачи идентификации. Основные определения.

Цель: Рассмотреть основные характеристики времянных рядов, общие задачи идентификации, основные определения, идентификация объектов управления методом корреляционного анализа.

Тезисы

Основные характеристики времянных рядов

Подробнее (см. [1-4]). Основные понятия: случайная величина и случайный процесс (СП), времянной ряд (ВР), реализация, ансамбль, стационарный СП, эргодический СП, оценка. У стационарных СП матожидание и дисперсия постоянны.

Временной ряд (или ряд динамики) — это упорядоченная по времени последовательность значений некоторой произвольной переменной величины. Тем самым, временной ряд существенным образом отличается от простой выборки данных. Каждое отдельное значение данной переменной называется отсчётом (уровнем, элементов) временного ряда.

Анализ временных рядов это совокупность математико-статистических методов анализа, предназначенных для выявления структуры временных рядов и для их прогнозирования. Сюда относятся, в частности, методы регрессионного анализа. Выявление структуры вре-мянного ряда необходимо для того, чтобы построить математическую модель того явления, которое является источником анализируемого временного ряда. Прогноз будущих значений временного ряда используется для эффективного принятия решений.

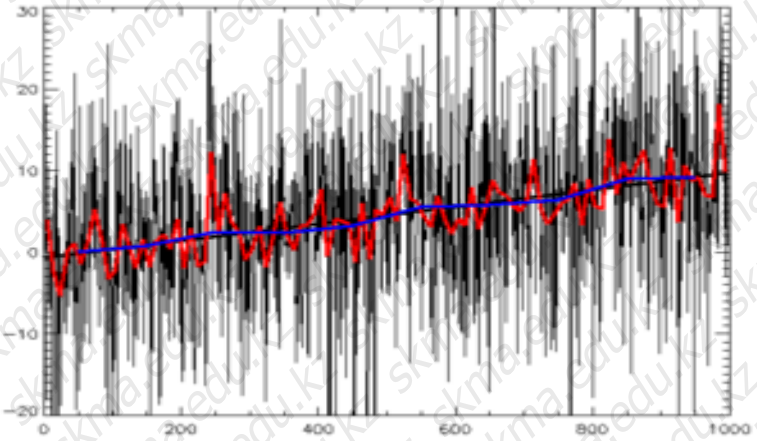


Рисунок 7.1 - Пример временного ряда

-

Примеры временных рядов (см. рисунок 7.1)**.** Временные ряды, как правило, возникают в результате измерения некоторого показателя. Это могут быть как показатели (характеристики) технических систем, так и показатели природных, социальных, экономических и других систем (например, погодные данные). Типичным примером временного ряда можно назвать биржевой курс, при анализе которого пытаются определить основное направление развития (тенденцию или тренда).

Иногда **нестационарный** СП g_i можно сделать стационарным $\tilde{y}_i$, удалив низкочастотную аддитивную составляющую (тренд, дрейф), например, применив фильтр верхних частот, использующий спектральное окно Тьюки:

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=-m}^{m} h_i g_{i-j},$$

где $h_0 = 1 - \frac{1}{m+1}$ $h_j = h_{-j} = \frac{1}{2(m+1)}\left[1 + \cos(\frac{j\pi}{m+1})\right]$, (7.1)

частота среза fc фильтра связана с его порядком m и частотой изменения временного ряда $f_{ИЗ}$ $f_c = f_{ИЗ}/2m$.

(матожидание, МО) ВР можно определить как:**.**

$$m_x = M[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt,$$

Оценка МО $\tilde{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ (7.2).

(Среднее по N измерениям, выборочное среднее, характеризует постоянное смещение ВР, неслучайная величина, для стационарного СП $\tilde{m}_x = const$).

В условиях АСУТП обычно стоит задача определения МО в режиме реального времени (online). Для этого может быть применена рекуррентная формула:

$$\bar{x}_i = \bar{x}_{i-1} + \frac{1}{i}(x_i - \bar{x}_{i-1}), \quad (7.3)$$

где $\bar{x}_i$ текущее значение МО, $\bar{x}_{i-1}$- МО определенное на предыдущем шаге, x_i текущее значение x (сигнал от датчика).

Другой вид формулы $\bar{x}_i = (1-\alpha)\bar{x}_{i-1} + \alpha x_i$, где 0<α<2.

Дисперсия ВР представляет собой МО квадрата отклонения x(t) от его среднего.

$$\tilde{D}_x^2 = \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i^2) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N}\right], \quad (7.4)$$

вторая из формул не требует предварительного определения x_i. Формула (7.4) – выборочная несмещенная дисперсия, если N-1 заменить на N получаем формулу для смещенной дисперсии, при больших N это одно и то же. Иногда дисперсию выражают в процентах. $\sigma_x = D_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ - среднеквадратичная погрешность (формула Бесселя).

В АСУТП в режиме on line дисперсия может быть вычислена по рекуррентном формулам:

$$\bar{x}_i = (1-\alpha)\bar{x}_{i-1} + \alpha x_i \quad \bar{x}_i^2 = (1-\alpha)\bar{x}_i^2 + \alpha x_i^2 \quad \sigma_i^2 = \bar{x}_i^2 - (\bar{x}_i)^2 \quad (7.5)$$

Автокорреляционная функция (АКФ) (см. рисунок 7.2а)

АКФ указывает степень связи последующих значений x(t) с предыдущими; определяет вероятность того, что функция x(t), имеющая в момент t значение x1 , будет в момент t+τ значение x2.

$$\tilde{R}_{xx} = \frac{1}{N-l}\int_0^{T-\tau} \dot{x}(t)\cdot\dot{x}(t+\tau) = \frac{1}{N-l}\sum_{i=1}^{N-l}\dot{x}_i\cdot\dot{x}_{i+l}\,, \qquad (7.6)$$

где $\dot{x}(t) = x(t) - m_x$, $\dot{x}_i = x_i - \bar{x}$ - центрированный ВР; l – смещение (лаг) на l шагов. В реальных процессах вероятность связи между xi и xi+l уменьшается, и Rxx имеет вид, показанный на рисунке 2.1. АКФ является четной функцией, чем круче опускается ее график, тем слабее связь между x(t) и x(t+τ) и наоборот; у белого шума АКФ δ-функция; Rxx = σ_x^2, при l=0.

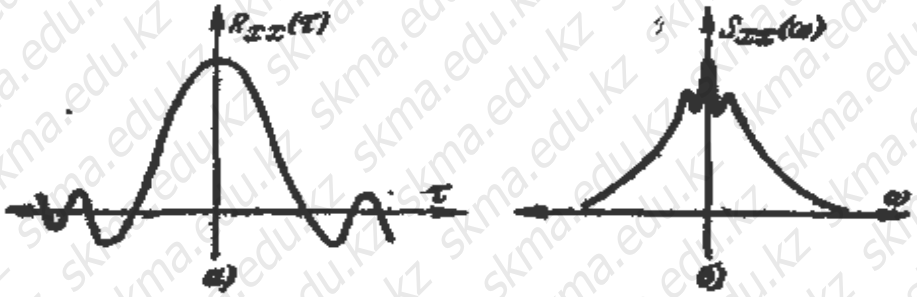


Рисунок.7.2- Графики автокорреляционной функции (а) и спектральной плотности (б).

Взаимная корреляционная функция (ВКФ)

ВКФ указывает степень связи значений входа x(t) в момент времени t со значениями выхода y(t-τ) в момент времени t-τ.

$$\tilde{R}_{xy} = \frac{1}{N-l}\int_0^{T-\tau} \dot{x}(t)\cdot\dot{y}(t+\tau) = \frac{1}{N-l}\sum_{i=1}^{N-l}\dot{x}_i\cdot\dot{y}_{i+l}\,, \qquad (7.7)$$

$R_{xy}(\tau)$ функция нечетная, график ее подобен графику АКФ, но смещен вправо на время запаздывания в объекте.

Спектральная плотность (СП)

Представляет собой преобразование Фурье от АКФ, может быть получена из АКФ или математической обработкой реализации СП, показывает, какая доля мощности СП приходится на данную частоту, позволяет судить о частотных свойствах объекта. Типичный график показан на рисунке 7.2.б. Часто $S_{xx}(\omega)$ получают аналитически, предварительно аппроксимировав R_{xx} каким-либо выражением.

$$S_{xx}(\omega) = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\cdot\cos(\omega\tau)d\tau = 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (7.8)$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega)\cdot\cos(\omega\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S_{xx}(\omega)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (7.9)$$

Аналогично записываются выражения и для взаимной спектральной плотности $S_{xy}(\omega)$.

При идентификации используют выражения:

$$S_{xy}(j\omega) = W(j\omega) \cdot S_{xx}(j\omega) \quad (7.10)$$

$$S_{yy}(j\omega) = S_{xx}(j\omega) \cdot |W(j\omega|^2 \quad (7.11)$$

Если у процесса $S_{xx}(\omega)$ имеет одно и то же значение во всем диапазоне частот от -∞ до ∞ то это идеализированный СП, называемый белым шумом (БШ), у которого любое последующее значение x(t) не связано с предыдущими x(t). Для БШ $R_{xx}(\tau) = S_{xx} \cdot \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$- дельта-функция. Часто вместо БШ используют СП без постоянной и без периодической составляющей со статистическими характеристиками:

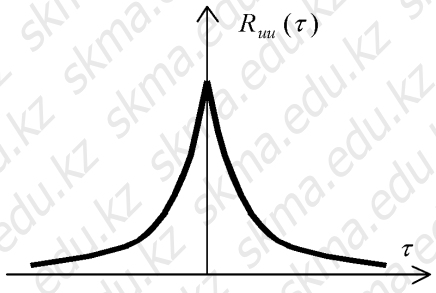
$$R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\mu|\tau|} \text{ и } S_{xx}(\omega) = \frac{2\mu D}{\mu^2 + \omega^2}. \quad (7.12)$$

Получение графиков АКФ и ВКФ не представляют особого труда. Однако для расчетов при идентификации обычно используют аналитические выражения. Помимо использования аппроксимации полиномами Чебышева, на практике применяют аппроксимация АКФ показательными и другими функциями.

1). $R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ (7.13) (см. рисунке 7.2), где α = const, параметр затухания и D_x- дисперсия, получают из аппроксимацией графика. Аналитическое выражение для спектральной плотности получаем в виде:

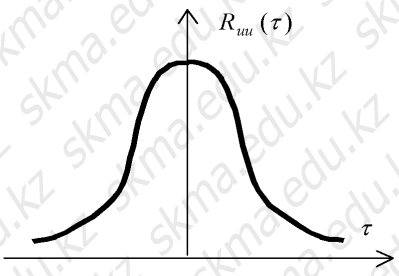
$$S_{xx}(\omega) = \frac{2D_x}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad . (7.14).$$

В зависимости от вида графика корреляционной функции $R_{ш}(\phi)$ (рис. 4.10), ее аппроксимируют одним из следующих выражений.



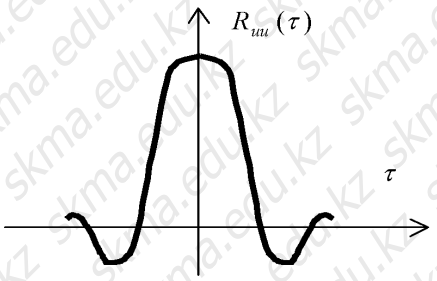
$$R_{ш}(\tau) = R(0)e^{-a|\tau|}$$

а)



$$R_{ш}(\tau) = R(0)e^{-a\tau^2}$$

б)



$$R_{uu}(\tau) = R(0)e^{-a|\tau|}Cos(\omega\tau)$$

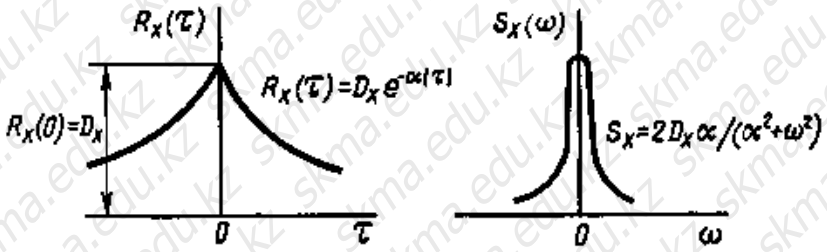


Рисунок 7.3 – аппроксимация АФХ и СП

2). $R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau)$ (7.15)

(см. рисунке2.2), где ω0 = const - резонансная частота, откуда:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2D_x}{\pi}\cdot\frac{\beta^2+\omega^2}{\beta^4+2(\alpha^2-\omega_0^2)\omega^2+\omega^4}, \beta = \alpha^2+\omega_0^2 \quad (7.16)$$

3). $R_{xx}(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}(\cos(\omega_0\tau)+\gamma\cdot\sin(\omega_0|\tau|)$ (7.17)

Доказывается, что любая АКФ может быть с любой степенью точности описана линейной комбинацией уравнений (7.15, 2.16, 2.17).

Общие задачи статистической идентификации. В практике моделирования систем наиболее часто приходится иметь дело с объектами, которые в процессе своего функционирования содержат элементы стохастичности или подвергаются стохастическим воздействиям внешней среды. **Общая характеристика метода статистического моделирования.** На этапе исследования и проектирования систем при построении и реализации машинных моделей (аналитических и имитационных) широко используется метод статистических испытаний (Монте-Карло), который базируется на использовании случайных чисел, т. е. возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей**Сущность метода статистического моделирования**. Таким образом, сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы S некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды Е, и реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ.

Идентификация объектов управления методом корреляционного анализа.

Метод корреляционного анализа используется для идентификации объектов управления в том случае, если входные и выходные сигналы являются случайными величинами. Рассмотрим пример определения АФЧХ на основе АКФ и ВКФ.



Рисунок 7.4 - Схема исследования объекта корреляционным методом

При корреляционном анализе используются описанные нами выше:

- автокорреляционная функция (АКФ) и
- взаимокорреляционная функция (ВКФ).

Напомним, что АКФ характеризует зависимость последующих значений случайной величины от предыдущих, находящихся на расстоянии Δτ.

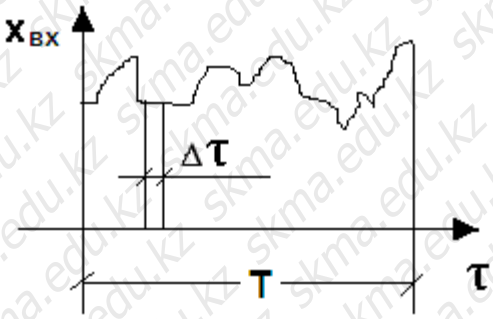


Рисунок 7.5 -. График изменения входной случайной величины – входного сигнала.

АКФ: $R_{x_{вх}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x_{вх}(\tau + \Delta\tau) \cdot x_{вх}(\tau) \cdot d\tau$. При $\Delta\tau \to 0$ – точнее.

Взаимокорреляционная функция связывает две величины, отстоящие друг от друга на Δτ.

ВКФ: $R_{x_{вх};x_{вых}}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x_{вых}(\tau + \Delta\tau) \cdot x_{вх}(\tau) \cdot d\tau$.

С АКФ и ВКФ связаны (через преобразование Фурье, когда входной-выходной сигнал раскладывается в ряд Фурье, состоящий из суммы синусоидальных колебаний с различной ω – ряд гармоник) спектральные плотности случайных величин.

$$S_{x_{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_{вх}}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau$$ – для АКФ

$$S_{x_{вх};x_{вых}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_{вх};x_{вых}}(\tau) \cdot \Delta\tau \cdot d\tau$$ – для ВКФ.

Физически $S_{x_{вх}}(\omega)$ показывает, какая доля мощности случайной величины приходится на данную частоту.

Через спектральную плотность находим искомую АФЧХ объекта:

$$АФЧХ = \overline{W}(i\omega) = \frac{S_{x_{вх};x_{вых}}(\omega)}{S_{x_{вх}}(\omega)}.$$

Аналитический метод идентификации. Аналитический метод вывода математической модели идентичной (совпадающей) по характеристикам с исследуемым объектом применим тогда, когда физико-химические процессы, происходящие в объекте, хорошо изучены.

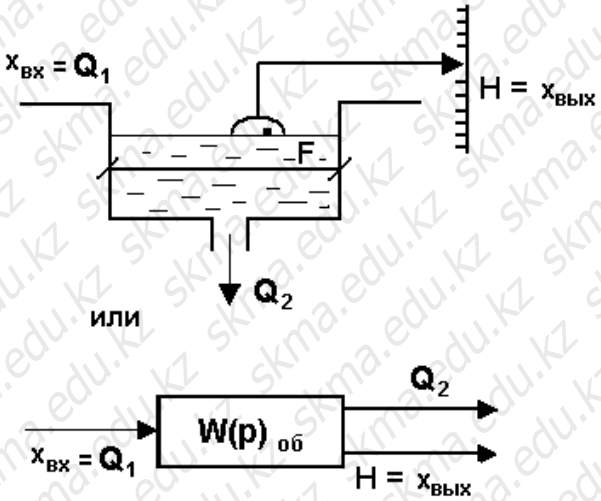


Рисунок 7.5 - Схема исследования объекта управления аналитическим методом.

Опишем явления, протекающие в этом объекте.

Статический режим: $Q_1^0 = Q_2^0$ (приток равен истоку);

Динамический режим: $\begin{cases} Q_1 = Q_1^0 + \Delta Q_1 \\ Q_2 = Q_2^0 + \Delta Q_2 \end{cases}$

$$Q_1 - Q_2 = Q_1^0 + \Delta Q_1 - Q_2^0 - \Delta Q_2 = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 =$$
$$= \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{d(F \cdot \Delta H)}{d\tau} = F \cdot \frac{d(\Delta H)}{d\tau}$$

Контрольные вопросы

1 Основные характеристики времянных рядов;
2 Автокорреляционная функция;
3 Спектральная плотность;
4 Сущность метода статистического моделирования;
5 Общие задачи статистической идентификации;
6 Идентификация объектов управления методом корреляционного анализа;
7 Аналитический метод идентификации.

Литература

Основная литература

1. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.
2. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.

Дополнительная литература

3. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.

Лекция 8 Определение переходных характеристик

Цель: Рассмотреть методы идентификации объектов управления на основе простейших тестирующих сигналов. Эти методы традиционно применяются в инженерной практике. Рассмотрено определение переходных характеристик при нанесении на вход объекта возмущений регулярной формы и методы. аппроксимация временных характеристик.

Тезисы

Методы идентификации с помощью синусоидальных, ступенчатых и импульсных сигналов

Первые реализованные в системах управления методы идентификации были основаны на использовании частотных, ступенчатых и импульсных воздействий. Большинство этих методов ограничивается применением для линейных процессов. Они могут быть также использованы и в линеаризованных системах, если уровни сигналов невелики (см. приложение.

точно свойства объекта описываются обыкновенными **линейными** дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами вида (2.3):

$$a_{n+1}\frac{d^n x}{dt^n}+\ldots+a_2\frac{dx}{dt}+a_1 x=b_{m+1}\frac{d^m u}{dt^m}+\ldots+b_2\frac{du}{dt}+b_1 u\,.$$

или считают, что адекватной математической моделью объекта может служить передаточная функция вида (2.8) или её разностный эквивалент вида (2.25):

$$W(p)=\frac{C}{1+T\cdot p}\cdot\exp(-p\cdot\tau) \qquad (*)$$

или более сложного вида (2.4) (если объект обладает самовыравниванием) или вида (2.9 – 2.11) для объекта без самовыравнивания.

Отметим что, несмотря на простоту выражения (*) оно достаточно точно описывает динамику широкого класса объектов в условиях малых отклонений. Существуют алгоритмы адаптации, которые осуществляют адаптивную т корректировку коэффициентов модели вида (*) или чаще (2.25) в условиях эксплуатации системы управления.

Для линейной системы справедлив принцип суперпозиции, заключающийся в том, что сумме любых возмущений соответствует сумма выходных реакций, каждая из которых определяется соответствующим воздействием; при любом изменении входного возмущения без изменения его формы выходная величина претерпевает такое же изменение, также не изменяя формы.

Принцип суперпозиции дает возможность выразить реакцию системы на любое возмущение через ее реакцию на определенный вид элементарных возмущений. Для этого достаточно представить произвольное возмущение элементарными воздействиями выбранного типа. В качестве типовых возмущений чаще всего применяют единичную скачкообразную функцию, единичную импульсную функцию, единичную линейную функцию, единичное гармоническое колебание, случайный двоичный сигнал и др..

1 Единичная скачкообразная функция описывает мгновенное изменение какого-то воздействия от 0 до 1 (рисунок .8.1).

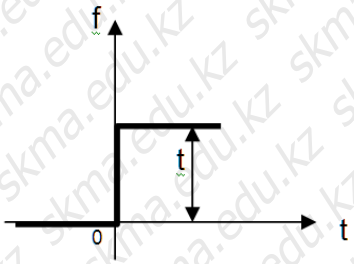


Рисунок .8.1 - . Единичная скачкообразная функция

Аналитически скачкообразную функцию записывают как :

$$f(t)=1(t)=\begin{cases} =0 \quad \text{при } t=-0 \text{ и } t<0 \\ =1 \quad \text{при } t=+0 \text{ и } t>0 \end{cases} \qquad (8.1)$$

Т.е. это ступенчатое единичное воздействие вида:

$$f(t)=1(t)=\begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t \leq 0 \end{cases}$$

2 Единичная импульсная функция описывает кратковременное возмущение, имеющее характер кратковременного импульсного толчка (рисунок .8.2).

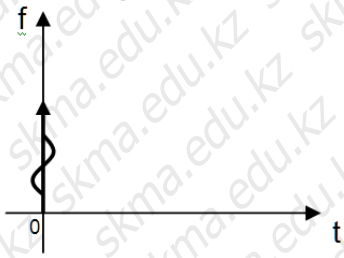


Рисунок .8.2 - . Единичная импульсная функция

Единичная импульсная функция, называемая δ - функцией Дирака (дельта - функцией), представляет собой первую производную от единичной скачкообразной функции:

$$\delta(t)=1'(t)=\frac{d1(t)}{dt} \qquad (8.2)$$

и равна нулю везде, кроме $t=0$, где она принимает бесконечное значение, причем при условии, что интеграл от нее по любому интервалу, содержащему $t=0$, равен единице.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 \qquad (8.3)$$

Т.е. $\delta(t)=\begin{cases}\delta(t)=\infty, t=t_0\\ \delta(t)=0, t\neq t_0\end{cases}$.

Функцию, обладающую такими свойствами, можно получить как предел положительного прямоугольного импульса, имеющего единичную площадь, когда длительность этого импульса стремится к нулю (рисунок .8.3).

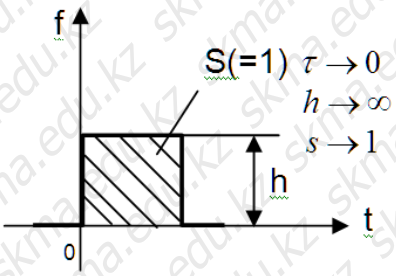


Рисунок .8.3 – К понятию единичная скачкообразная функция

3 Единичную линейную функцию $f(t)=kt$ при $k=1$ называют еще рамповым возмущением (рисунок .8.4).

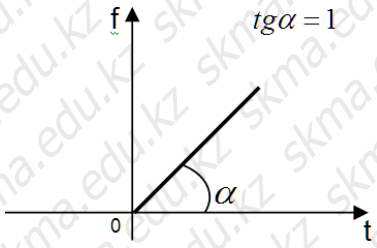


Рисунок .8.4 - . Единичная линейная функция

Такое возмущение является типичным для следящих систем регулирования.

4 Единичное гармоническое возмущение чаще всего записывают как функцию, изменяющуюся по синусоидальному закону (рисунок .8.5)

$$f(t)=\sin\omega t=e^{j\omega t} \qquad (8.5)$$

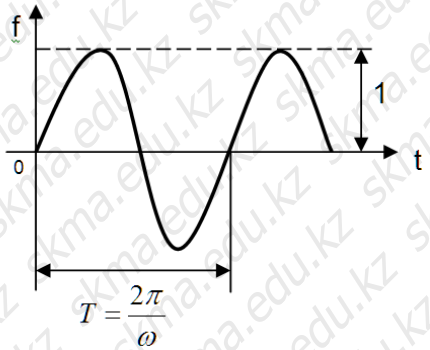


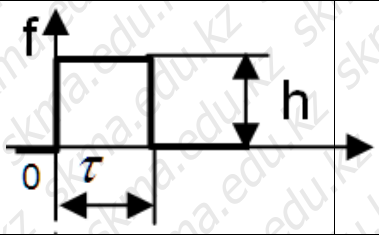
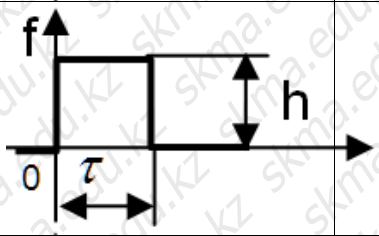
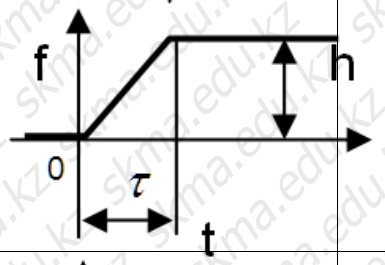
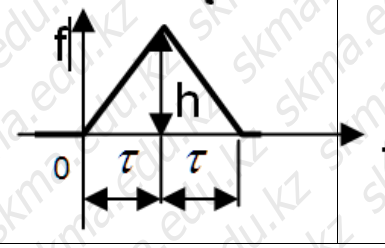
Рисунок .8.5 - Единичное гармоническое возмущение

Такой тип возмущений применяют при частотных методах анализа АСР.

В качестве возмущающих воздействий могут быть использованы и типовые функции, некоторые из которых приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1.

Типовые возмущающие воздействия

№п/п	Возмущение f(t)	Графикf(t)	Изображение F(p)
1	Ступенчатое при высоте ступени h		$\frac{h}{p}$ (8.6)
2	П-образное при высоте h и при длительности τ		$\frac{h}{p}(1-e^{-\tau p})$ (8.7)
3	Ступенчатое при высоте h и времени нанесе-ния возмущения τ		$\frac{h}{\tau p^2}(1-e^{-\tau p})$ (8.8)
4	Треугольное при высоте h и времени нанесе-ния возмущения 2τ		$\frac{h}{\tau p^2}(1-e^{-2\tau p})^2$ (8.9)

Простейшим входным сигналом, используемым при идентификации, является ступенчатый сигнал. Такой сигнал на входе системы может быть сформирован, например, путем внезапного открывания (или закрывания) входного клапана, включения (или выключения) управляющего напряжения или тока и т. д., так как это почти всегда возможно без применения специальной аппаратуры. У идеального ступенчатого сигнала время нарастания сигнала равно нулю, что физически невозможно, так как при этом скорость нарастания должна быть бесконечно большой. Следовательно, любой реальный ступенчатый входной сигнал является лишь аппроксимацией идеального ступенчатого сигнала. Однако если время нарастания сигнала гораздо меньше пе риода высшей гармоники, то ошибка идентификации становится незначительной. В процессах с помехами или в случаях, когда измерения содержат шум (что обычно имеет место на практике в той или иной степени), необходима соответствующая фильтрация шума.

При снятии переходной характеристики необходимо выполнить ряд условий, представленных в таблице 8.2:

Таблица8.2

Условия снятия переходной характеристики

No	Условия
1	Если проектируется система стабилизации технологического параметра, то переходная характеристика должна сниматься в окрестности рабочей точки процесса.
2	Переходные характеристики необходимо снимать как при положительных, так и отрицательных скачках управляющего сигнала. По виду кривых можно судить о степени асимметрии обьекта. При небольшой асимметрии расчет настроек регулятора рекомендуется вести по усредненным значениям параметров передаточных функций. Линейная асимметрия наиболее часто проявляется в тепловых обьектах управления.
3	При наличии зашумленного выхода желательно снимать несколько переходных характеристик (кривых разгона) с их последующим наложением друг на друга и получением усредненной кривой.
4	При снятии переходной характеристики необходимо выбирать наиболее стабильные режимы процесса, например, ночные смены, когда действие внешних случайных возмущений маловероятно.
5	При снятии переходной характеристики амплитуда пробного входного сигнала должна быть, с одной стороны, достаточно большой, чтобы четко выделялась переходная характеристика на фоне шумов, а, с другой стороны, она должна быть достаточно малой, чтобы не нарушать нормального хода технологического процесса.

Примечание к таблице 8.2: Начальные условия снятия переходной характеристики: В начальный момент необходимо, чтобы система управления находилась в покое, т.е. регулируемая величина **X** (например, температура в печи) и управляющее воздействие регулятора **Y** (выход регулятора на исполнительный механизм) не изменялись, а внешние возмущения отсутствовали. Например, температура в печи оставалась постоянной и исполнительный механизм не изменяет своего положения. Затем на вход исполнительного механизма подается ступенчатое воздействие, например, включается нагреватель. В результате состояние объекта начинает изменяться.

Определение динамических характеристик объекта управления с самовыравниванием по его переходной характеристике. Наиболее часто при определении динамических свойств объекта регулирования применяют ступенчатое возмущающее воздействие, т.е. экспериментально находят переходную функцию объекта (рисунок .8.6). Самовыравниванием процесса регулирования называется свойство регулируемого объекта после нарушения равновесия между притоком и расходом вернуться к этому состоянию самостоятельно, без участия человека или регулятора..

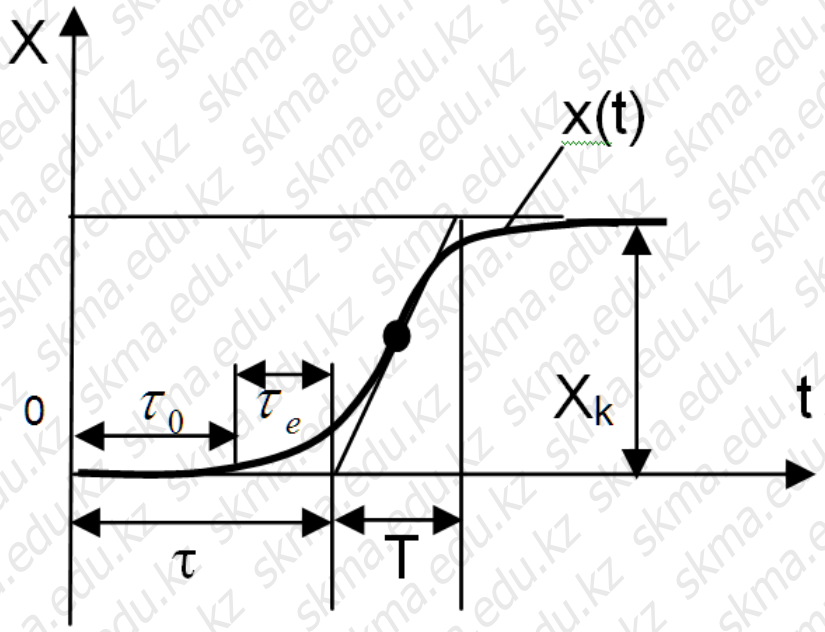


Рисунок .8.6 - . Единичная скачкообразная функция

В то случае, если нас устраивает вид уравнения (*), то его параметры находятся достаточно просто:

- коэффициент усиления - по формуле $C = \frac{X_K}{\Delta U}$, где X_K - установившееся значение выхода а ΔU – возмущение на входе объекта;
- постоянную времени Т – как проекцию касательной к кривой разгона в точке перегиба (см. рисунок .8.6);
- время запаздывания - τ как расстояния от точки 0 до пересечения касательной к кривой разгона в точке перегиба с осью времени (см. рисунок .8.6).

Проверка адекватности. Для решения этой проблемы надо выполнить моделирование функции выхода при передаточной функции объекта вида (*). Т.е. рассматривается объект с одним входом и одним выходом со свойствами: стационарности, линейности, сосредоточенности параметров. В данном простом примере достаточно воспользоваться уравнением (2.13)

$$\hat{X}(t) = C \cdot \Delta U \cdot \left[1 - \exp(-\frac{t-\tau}{T})\right] (\text{при} \quad t \geq \tau)$$

$$\hat{X}(t) = 0 \, (\text{при} \quad t < \tau)$$

См. пример на следующей странице на рисунке 8.7, решенный с системе Mathcad. Если значение δ, найденное по следующей формуле, не превышает 3-7%, то модель считается адекватной:

$$\delta = \frac{100\%}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i - \hat{X}_i}{X_i}$$

Если окажется, значение ошибки δ слишком велико, то надо изменить положение касательной на графике (не обязательно, чтобы она проходила через линию перегиба). Если и это не помогает, то надо применить более точный метод получения передаточной функции, например метод площадей (метод Симою).

Идентификация динамических характеристик объектов с самовыравниванием методом площадей [2-6]. Этот метод является одним из инженерных методов идентификации динамических характеристик объектов управления. Этот метод удобен как для реализации на ЭВМ, так и для ручного счета и обладает вполне удовлетворительной для практики точностью.

Метод предполагает идентификацию вне процесса управления, так как использует не результаты измерений при нормальной эксплуатации САУ, а требуется проведения специальных экспериментов по снятию кривой отклика объекта на ступенчатое возмущение на входе объекта. По этой экспериментально полученной кривой разгона определяется коэффициенты передаточной функции вида:

$$W(p) = C * W^* * e^{-p\tau_3} \qquad (8.10)$$

где:

$$W^* = \frac{b_1 + \sum_{i=1}^{M} b_{i+1} p^i}{a_1 + \sum_{i=1}^{N} a_{i+1} p^i} \qquad M \le N \qquad (8.11)$$

Коэффициент усиления объекта с самовыравниванием рассчитывается по формуле:

$$C = \frac{X_K}{\Delta U} \qquad (8.12)$$

Метод применим и для объекта без самовыравнивания .

Аппроксимация кривой разгона апериодическим звеном первого порядка Инков А.М. ORIGIN := 1

$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} :=$

№	Исходные данные t - время		x - выход
1	2,10	88,86	0,00
2	4,80	88,86	0,00
3	7,33	89,17	0,31
4	10,18	89,96	1,10
5	13,22	90,81	1,95
6	16,42	91,57	2,71
7	18,83	92,02	3,16
8	20,86	92,31	3,45
9	23,94	92,68	3,82
10	28,11	93,03	4,17
11	30,10	93,19	4,33
12	32,92	93,27	4,41
13	34,16	93,36	4,50
14	38,20	93,46	4,60
15	42,17	93,53	4,67
16	43,00	93,54	4,68
17	44,00	93,55	4,69
18	45,00	93,56	4,70
19	46,00	93,56	4,70
20	47,00	93,56	4,70

n -количество точек кривой разгона $n := 20$ $i := 1..n$

C - коэффициент усиления объекта $C := \frac{x_n}{10}$ $C = 0.47$

τ - время запаздывания объекта $\tau := 7.5$

T - постоянная времени объекта $T := 10$

Исходная кривая разгона аппроксимируется переходным процессом в апериодическом звене с передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{C}{1 + T \cdot p} \cdot \exp(-p \cdot \tau)$$

и переходным процессом:

$$\hat{X}(t) = C \cdot \Delta U \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \tau}{T}\right)\right] \quad \text{для} \quad t \geq \tau \quad \text{или}$$

$$X_i := \text{if}\left[t_i < \tau, 0, C \cdot 10 \cdot \left[1 - \exp\left[\frac{-(t_i - \tau)}{T}\right]\right]\right]$$

Проверка адекватности:

$$\delta := \left(\frac{100}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - X_i}{x_i} \qquad \delta 1 := \left(\frac{100}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - X_i|}{x_i}$$

$\delta 1 = 6.773$

$\delta = 5.838$

Сплошная линия - исходная кривая разгона, пунктирная линия - результат аппроксимации

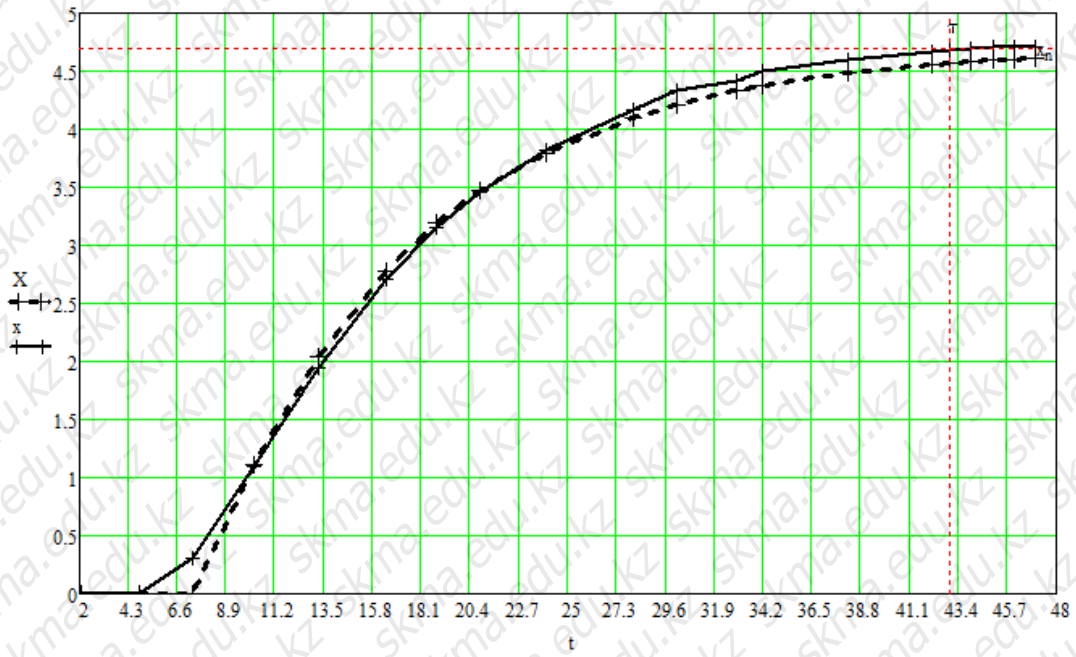


Рисунок .8.7 – Пример проверки адекватности

Время чистого запаздывания τ_3 определяется из графика кривой разгона как время, прошедшее с момента нанесения возмущения до появления реакции на выходе объекта.

Метод площадей позволяет определить коэффициенты ai, bi, M, N, входящие в (8.11).

Рассмотрим применение метода площадей для определения математической модели стационарного линейного объекта с одним входом и одним выходом, имеющего структурную схему вида:



На рисунке 8.8 показана полученная в результате эксперимента кривая разгона. Для обработки используется часть кривой разгона начина с момента времени $t=\tau_3$, представленная дискретными значениями выхода X_i, задаваемыми с шагом по времени Δt. Точка $t=\tau_3$ принимается за новое начало координат.

При расчетах используется кривая разгона в нормированном виде , которая получается из исходной по формуле :

$$Z_i = 1-X_i/X_k \qquad (8.13)$$

Суть метода площадей сводится к разложению функции $(W^*)^{-1}$ в усеченный ряд по степеням p, то есть к разложению:

$$W^*(p)^{-1} = \frac{1}{W^*(p)} = 1 + \sum_{i=1}^{N} F_i p_i \qquad (8.14)$$

Интегральные площади F_i, входящие в(5) вычисляются по формулам:

$$F1 = \int_0^\infty Z(t)dt \qquad (8.15)$$

$$F2 = \int_0^\infty \int_0^t Z(t)dt^2 = F_1^2 \int_0^\infty Z(t)(1-\theta)d\theta \qquad (8.16)$$

$$F3 = \int_0^\infty \int_0^t \int_0^t Z(t)dt^3 = F_1^3 \int_0^\infty Z(t)(1-2\theta+\frac{\theta^2}{2})d\theta \qquad (8.17)$$

Величины F_i определяются методами численного интегрирования. Например, если воспользоваться методом трапеций, то:

$$F_1 = \Delta t\ (S_1-0.5) \qquad (8.18)$$

$$F_2 = F_1 \Delta t\ (S_2-0.5) \qquad (8.19)$$

$$F_3 = F_1^2 \Delta t\ (S_3-0.5) \qquad (8.20)$$

.....

$$F_l = F_1^{l-1} \Delta t\ (S_l-0.5) \qquad (8.21)$$

(8.26)

$$\theta_i = t_i/F_1 \qquad (8.27)$$

Таким образом, имеем значения Z_1, Z_2, Z_k,нетрудно рассчитать F_i.

В этой системе необходимо подставить нули вместо каждого ai или bi при j>N+1 и j>M+1,а затем решить относительно ai и bi.

При ручном счете обычно ограничиваются вычислением F1,F2,F3 и принимают, что если F3<0, или если X'(0)#0, то M=1, N=2 , то есть передаточная функция W*(p) имеет вид :

$$W^*(p) = \frac{b_1 + b_2 p}{a_1 + a_2 p + a_3 p^2} \quad \text{…. (8.29)}$$

где:
$b_1=1$; $b_2=-F_3/F_2$; $a_1=1$
$a_2=F_1+b_2$; $a_3=F_2+b_2F$ (21)
а если X'(0)=0 и $F_3>0$, то M=0 ,N=3 , а передаточная функция имеет вид :

$$W^*(p) = \frac{1}{a_1 + a_2 p + a_3 p^2 + a_4 p^3} \quad (8.30)$$

где :
$b_1=1$; $a_1=1$; $a_2=F_1$; $a_3=F_2$; $a_4=F_3$ (8.31)



Рисунок. 8.8А - Возмущение на входе объекта

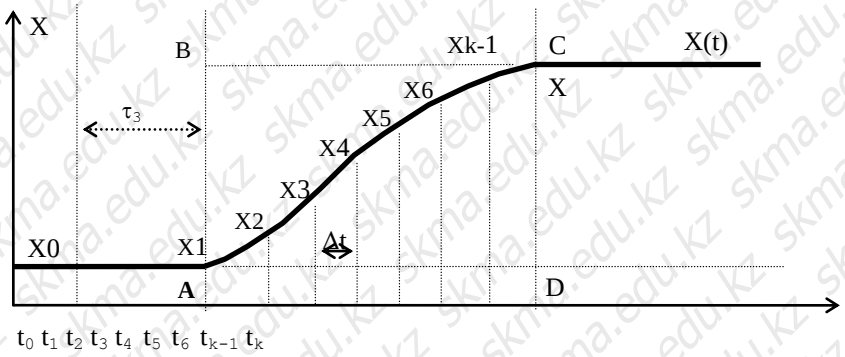


Рисунок 8.8б - Кривая разгона объекта с самовыравниванием

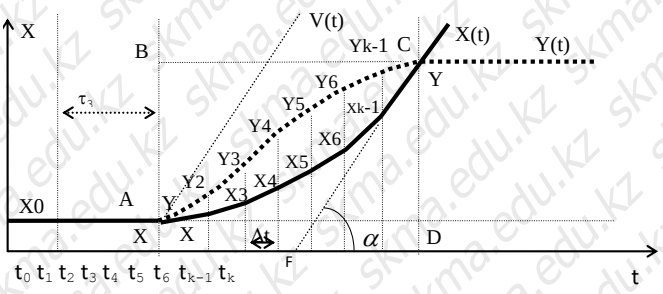


Рисунок 8.8в - Кривая разгона объекта без самовыравнивания

При ручном счете удобно заносить результаты в таблицу вида:

Таблица 8.4.

t_i	X_i	Z_i	θ_i	$1-\theta_i$	$Z_i(1-\theta_i)$	$1-2\theta_i+\theta_i^2/2$	$Z_i(1-2\theta_i+\theta_i^2/2)$
1	2	3	4	5	6	7	8

Эта таблица содержит К строк. Первые два столбца содержат исходные данные - точки времени и значения выхода. Сумма чисел столбца 4 даст значения S_1, сумма столбца 6- S_2, сумма столбца 8 - S_3.

См. также примеры, приведенные в лабораторной работе №5 [3], где рассмотрены и объекты без самовыравнивания.

Идентификация динамического объекта управления по импульсной характеристике. Иногда по технологическим условиям нельзя длительное время держать «единичный скачок» на входе объекта. Тогда подается возмущение типа «единичного импульса», длительность которого достаточна для заметного изменения выходного сигнала. Практически «единичный импульс» рассматривается как два последовательных «единичных скачка», только первый имеет значение (+1), а второй – (-1). Полученная на объекте экспериментальная импульсная характеристика – график изменения во времени выходного сигнала объекта путем несложных графических преобразований достраивается до экспериментальной кривой разгона и далее поиск математической модели – $W_{об}(p)$ идет по указанному выше пути. Перестройка импульсной характеристики объекта до экспериментальной кривой разгона идет так:

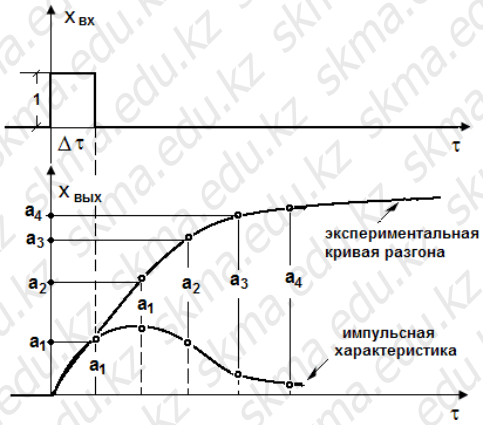


Рисунок .8.6 - Схема преобразования экспериментальной импульсной характеристики в кривую разгона.

Контрольные вопросы

1 Методы идентификации с помощью синусоидальных, ступенчатых и импульсных сигналов;

2 Условия снятия переходной характеристики

3 Определение динамических характеристик объекта управления с самовыравниванием по его переходной характеристике;
4 Идентификация динамических характеристик объектов с самовыравниванием методом площадей;
5 Идентификация динамического объекта управления по импульсной характеристике.

Литература

Основная литература

1. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
2. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.

Дополнительная литература

3. Инков А.М. Моделирование и идентификация объектов управления. Методические указания к выполнению лабораторных работ для студентов спец. 050702. Шымкент, ЮКГУ, 2010 г., -78 с.

Лекция 9 . Определение частотных характеристик

Цель: Рассмотреть методы идентификации объектов управления на основе простейших тестирующих сигналов. Эти методы традиционно применяются в инженерной практике. Рассмотрено определение частотных характеристик при нанесении на вход объекта возмущений периодического характера и аппроксимация экспериментальных частотных характеристик

Тезисы

Частотные характеристики динамического звена. Частотной характеристикой динамического звена называют функцию комплексного аргумента $j\omega$, полученную путем формальной замены *p* на $j\omega$ в выражении передаточной функции/

Рассмотренные выше формулы (2.19-2.21) описывают связь между разными видами частотных характеристик.

Напомним, что частотную характеристику динамического звена можно определить как отношение спектра (преобразования Фурье) выходного сигнала к спектру входного сигнала.

Знание частотной характеристики звена позволяет определить выходной спектр по входному.

На рисунке 9.1 показаны частотные характеристики некоторого динамического звена.

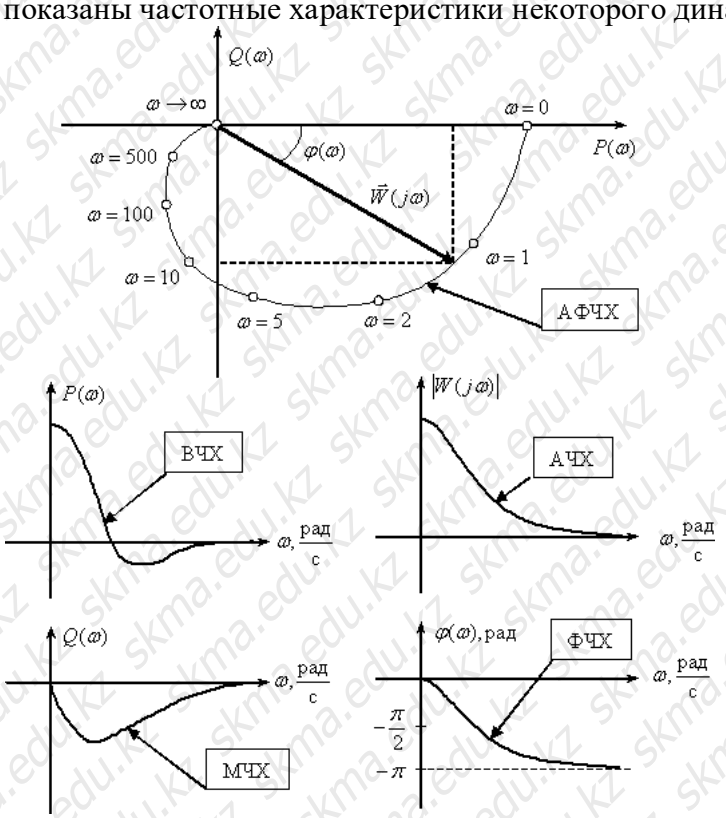


Рис. 9.1 – Частотные характеристики

При подаче на вход **линейной** системы сигнала:

$$U(t) = A_u \sin(\omega t) = A_u \cdot \exp(j\omega t) \qquad (9.1)$$

на выходе будет сигнал:

$$X(t) = A_X \sin(\omega t + \varphi) = A_X \cdot \exp(j\omega t + \varphi), \quad (9.2)$$

Отсюда следует простой алгоритм экспериментального определения частотной характеристики линейного динамического звена, объекта или системы управления для конкретной частоты ω_1:

- подать на вход объекта синусоидальный сигнал частоты ω_1 и постоянной амплитуды;
- дождаться затухания свободной составляющей переходного процесса;
- измерить амплитуду выходного сигнала и сдвиг его по фазе относительно входного сигнала.

Отношение амплитуды выходного установившегося сигнала к амплитуде входного сигнала определит модуль частотной характеристики при частоте ω_1.

Сдвиг фазы выходного сигнала относительно входного сигнала определит угол (аргумент) частотной характеристики при частоте ω_1.

Применяя данный алгоритм для частот от нуля до бесконечности, можно экспериментальным путем определить частотную характеристику конкретного устройства. Функциональная схема экспериментальной установки для снятия частотных характеристик имеет вид, показанный на рисунке 9.2..

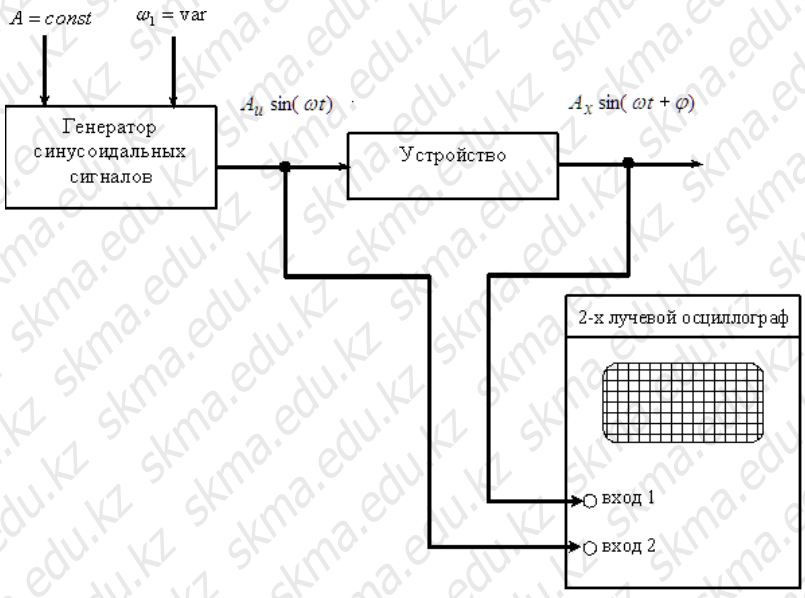
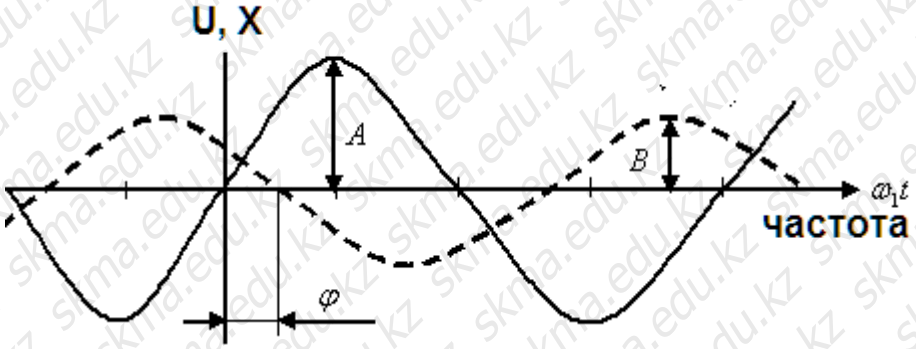


Рис. 9.2 – Снятие частотных характеристик

При частоте ω_1 на экране осциллографа получаем после затухания свободной составляющей следующую картину, показанную на рисунке 9.3. Отметим, что процедура снятия частотных характеристик - длительная процедура, т.к. в одном опыте – получается только одна точка графика 9.3



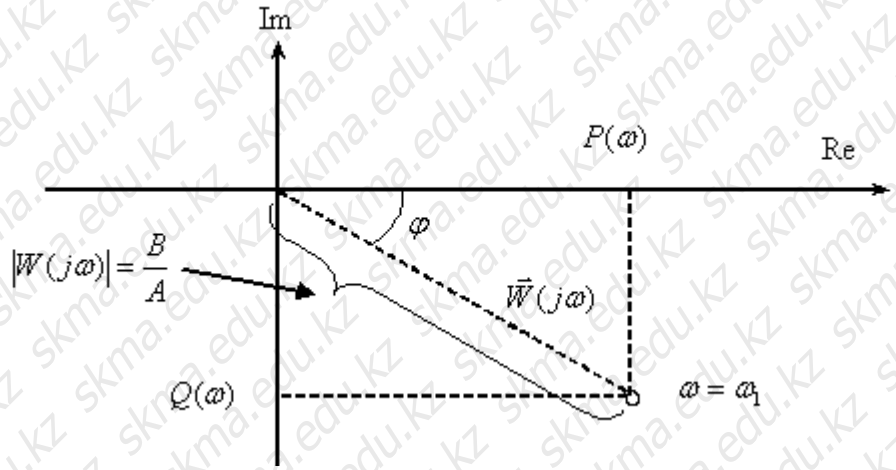
А – амплитуда входного сигнала $A_u \sin(\omega t)$;

В - амплитуда выходного сигнала $A_x \sin(\omega t + \varphi)$;

ϕ - сдвиг по фазе

Рисунок 9.3 – Входные и выходные сигналы при снятии частотных характеристик

На основании полученных данных можно построить на комплексной плоскости точку, принадлежащую частотной характеристике устройства, а совокупность точек при изменении частоты от нуля до величины, когда амплитуда выходного установившегося сигнала станет пренебрежимо мала, будет представлять собой амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ). Как видно из рисунка, по этим данным может быть построена любая необходимая частотная характеристика устройства.



4. Рисунок 9.4 – График АФЧХ

Для экспериментального получения частотных характеристик различных объектов в инженерной практике используют специализированные приборы, а в последнее время широко используют для таких целей персональные компьютеры, оснащенные специализированными платами ввода-вывода и пакетами прикладных программ.

Определение передаточной функции объекта по частотным характеристикам. Существует ряд достаточно сложных для вычисления методов, и даже ряд вычислительных устройств для обработки частотных характеристик.

Гармонический анализ входного прямоугольного сигнала приводит к такому выражению

$$u(t) = \frac{4A}{\pi}\left[Sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3}Sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5}Sin\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) + \ldots.\right], \quad (9.5)$$

где А – амплитуда прямоугольной волны.

Вычислив амплитуды и фазы входных и выходных гармонических составляющих можно вычислить значения амплитудно-частотной характеристики на выбранной частоте, как отношение амплитуд гармонических составляющих на выходе и входе объекта и значения фазо - частотной характеристики, как соответствующий фазовый сдвиг $ф_к$.

Определение аналитического выражения передаточной функции по частотным характеристикам может быть осуществлено несколькими способами. Рассмотрим один из них позволяющий аналитически вычислить выражение для передаточной функции по дискретным ординатам вещественной частотной характеристики.

Будем искать выражение для передаточной функции в виде ряда

$$W(p) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k. \quad (9.6)$$

Тогда делая подстановку

$$tg\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \omega, \quad (9.7)$$

выражение для вещественной частотной характеристики можно записать в виде

$$U(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k Cos(k\varphi). \quad (9.8)$$

Если теперь провести гармонический анализ экспериментально полученной вещественной частотной характеристики, то в результате будут получены неизвестные коэффициенты передаточной функции $A_к$.

Ограничиваясь значащими членами ряда (9.8) можно записать выражение передаточной функции объекта в виде (9.6).

Ограничение на использование данного метода вычисления передаточной функции относятся к самовыравнивающимся, устойчивым и неминимально-фазовым объектам. В том случае если объект не отвечает этим требованиям, то при вычислении вещественной частотной характеристики необходимо учесть влияние интегрирующих звеньев и звеньев запаздывания на вид этой характеристики и проводить ее расчет с учетом этого влияния.

Компенсация запаздывания осуществляется выражением

$$U_з(\omega) = U(\omega)Cos\omega\tau - V(\omega)Sin\omega\tau, \quad (9.9)$$

а компенсация интегрирующих звеньев –

$$U_и(\omega) = \frac{V(\omega)}{\omega}, \quad (9.10)$$

где U (ω и)V (ω -) экспериментальные вещественная и мнимая частотные характеристики.

Пример. Проведем идентификацию объекта с передаточной функцией

$$W(p)=\frac{2,5}{(p+0,1)(p^2+6p+25)}. \qquad (9.11)$$

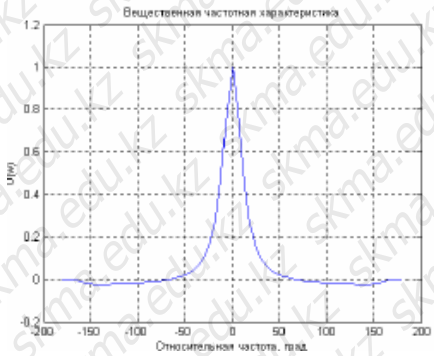


Рисунок 9.5 – Полученная вещественная частотная характеристика объекта

На рисунке 9.6 приведены результаты гармонического анализа вещественной частотной характеристики (рисунок 9.6), позволившие найти амплитуды гармоник Ак.

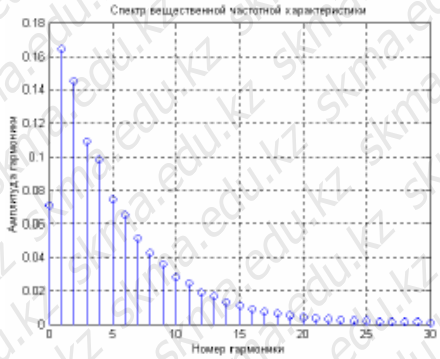


Рисунок 9.5 – Результаты гармонического анализа полученной вещественной частотной характеристики

Расчет передаточной функции по формуле (9.6) с удержанием трех составляющих сбалансированной реализации модели (9.6) дает следующее выражение передаточной функции

$$W(p)=\frac{-0.038723\,(s-2.923)\,(s\text{^}2+0.2386s+0.04178)}{(s+0.1553)\,(s\text{^}2+0.2452s+0.03147)} \qquad (9.12)$$

Переходные характеристики исходного объекта и его модели, полученной в результате идентификации, изображены на рисунке 9.6. Следует отметить значительные погрешности идентификации рассмотренного метода, особенно при определении коэффициента передачи объекта.

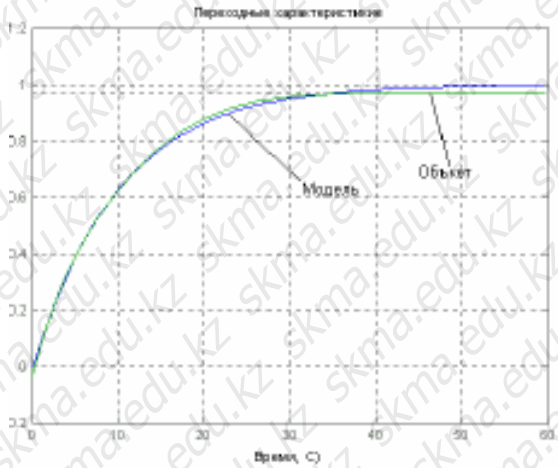


Рисунок 9.3 – Переходные характеристики исходного объекта и его модели

Контрольные вопросы

1 Частотные характеристики динамического звена;
2 Определение передаточной функции объекта по частотным характеристикам;
3 Вычисление амплитуды и фазы входных и выходных гармонических составляющих

Литература

Основная литература

1. Современные методы идентификации систем. Под ред. П. Эйкгоффа, М.: Мир, 1983
2. Ордынцев В. М. Математическое описание объектов автоматизации. – М: Машиностроение, 1965. – 360 с.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М: Мир, 1979. – 302 с.

Дополнительная литература

4. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.
5. Семенов А. Д., Артамонов Д. В., Брюхачев А. В. Идентификация объектов управления: Учебн. пособие. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003.- 211 с.
6. Инков А.М. Моделирование и идентификация объектов управления. Методические указания к выполнению лабораторных работ для студентов спец. 050702. Шымкент, ЮКГУ, 2010 г., -78 с.

Лекция 10 Общая схема процесса идентификации

Цель: Рассмотреть основные этапы идентификации; и такие понятия как априорная и апостериорная информация; критерии и показатели качества идентификации. Проведена классификация методов идентификации. Рассмотрены принципы структурной и параметрической идентификация; активной и пассивной идентификации.

Тезисы

Рассмотрим перечень примерных этапов идентификации. Технология математического моделирования технических систем в общем случае предполагает выполнение следующих основных этапов:

1. Формулировка целей. В основе всякой задачи, проблемы моделирования лежит информация о том, какие зависимости нас интересуют, каковы его цели его использования. Именно эта информация определяет объект. Эти представления могут быть очень приближенными, но всегда отражают некоторые его свойства, достаточные для эффективной формулировки целей моделирования. Обычно в задачах моделирования цель достигается путем максимизации или минимизации некоторого критерия, задаваемого в виде целевой функции.

2. Изучение объекта. При этом требуется понять происходящий процесс, определить границы объекта с окружающей его средой, если таковые имеются. Кроме того, на данном этапе определяются перечень всех входных и выходных параметров объекта исследования и их влияние на достижение целей моделирования.

3. Описательное моделирование (разработка концептуальной модели) - установление и словесная фиксация основных связей входных и выходных параметров объекта.

4. Математическое моделирование (разработка математической модели)- перевод описательной модели на формальный математический язык. Цель записывается в виде функции, которую обычно называют целевой. Поведение объекта описывается с помощью соотношений, входные и выходные параметры объекта на данном этапе в зависимости от сложности исследуемой проблемы могут возникать ряд задач чисто математического характера. Такими задачами являются задачи математического программирования, линейной алгебры, задачи дифференциального и интегрального исчисления и многие другие.

5. Выбор (или создание) метода решения задачи. На данном этапе для возникшей математической задачи подберется подходящий метод. При выборе такого метода необходимо будет обратить внимание на сложность метода и потребляемые вычислительные ресурсы. Если подходящего метода по предъявленным критериям не окажется, то требуется разработать новый метод решения задачи. Мы делаем упор на разработку новых эффективных методов, не уступающих известным методам по основным вычислительным характеристикам.

6. Выбор или написание компьютерных программы. На данном этапе выбирается подходящая программа, реализующая выбранный метод решения. Если такая программа отсутствует, то необходимо написать такую программу.

7. Решение задачи на компьютере. Вся необходимая информация для решения задачи вводится в память компьютера вместе с программой. С использованием подходящей программы производится обработка целевой информации и получение результатов решения задач в удобной форме.

8. Проверка адекватности модели (верификация модели).

9. Анализ получаемого решения. Анализ решения бывают двух видов: формальный (математический), когда проверяется соответствие полученного решения построенной математической модели (в случае несоответствия проверяется программа, исходные данные, работа ЭВМ и др.) и содержательный (экономический, технологический и т.п.), когда проверяется соответствие полученного решения тому объекту, который моделировался. В результате такого анализа в модель могут быть внесены изменения или уточнения, после чего весь рассмотренный процесс повторяется. Модель считается построенной и завершенной, если она с достаточной точностью характеризует деятельность объекта по выбранному критерию. Только после этого модель можно использовать при расчетах.

Результаты сравнительного анализа методов моделирования, выполненного на качественном уровне, представлены в таблице10.1 (фигурными скобками отмечены наилучшие значения каждого показателя).

Таблица 10.1

Результаты сравнительного анализа методов моделирования

Метод моделирования	Сложность метода	Общность рез-тов	Точность рез-тов	Затраты времени	Матер. затраты	Задачи синтеза
Аналитический	{+}	{++++}	+	{+}	{+}	{+}
Численный	++	+++	++	++	++	++
Имитационный	+++	+	{++++}	++++	++++	++++
Комбинированный	++++	++	+++	+++	+++	+++

Для решения задач математического моделирования и идентификации необходима исходная информация. Её условно разделяют на два вида - априорную и апостериорную информацию. (**априорная** информация [aprior information] и **апостериорная** информация [aposterior information]). Соответственно, это данные, имевшиеся до проведения какого-либо опыта или другого действия, и сведения, полученные после его выполнения. Обычно приходиться работать в условиях неполноты априорной и текущей информации об объекте и при наличии неконтролируемых возмущений различного происхождения.

В том случае, если объект рассматривается как «черный ящик», то как правило используют только апостериорную информацию.

«Чёрный ящик» — термин, используемый в точных науках (в частности, системотехнике, кибернетике и др.) для обозначения системы, механизм работы которой очень сложен, неизвестен или неважен в рамках данной задачи. Такие системы обычно имеют некий «вход» для ввода информации и «выход» для отображения результатов работы. Состояние выходов обычно функционально зависит от состояния входов.

Использование априорной информации об объекте исследования (если она доступна) во многих случаях облегчает решение проблемы идентификации.

Критерии и показатели качества идентификации. Формирование критерия качества, характеризующего адекватность модели реальному объекту, является одним из основных этапов идентификации.

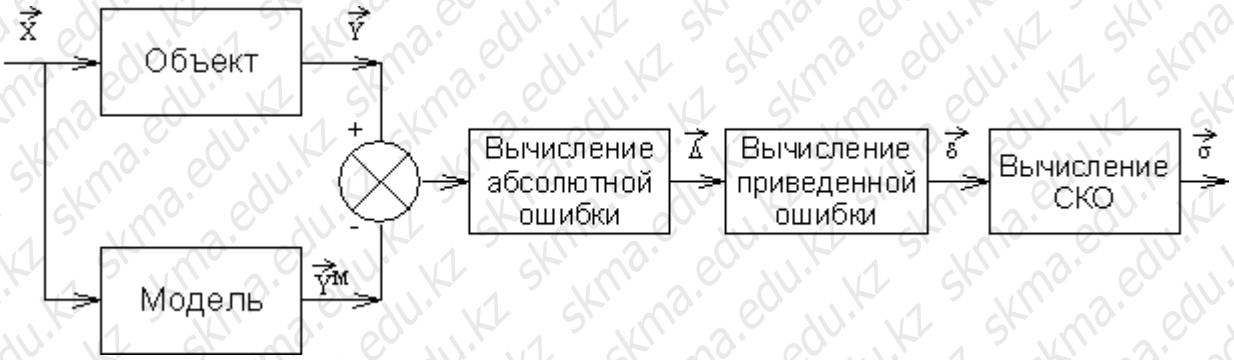


Рисунок 10.1 - Структурная схема вычисления оценки ошибки модели

Пусть проведено l опытов при различных уровнях входных воздействий $\vec{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})$ из области D_x их допустимых значений и получены реализации выходов объекта $\vec{y}_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj})$ и выходы модели $\vec{y}_j^{M} = (y_{1j}^{M}, y_{2j}^{M}, \ldots, y_{mj}^{M})$, $(j = \overline{1,l})$.

где $\Delta_i, \delta_i, \sigma_i$ - абсолютная, приведенная и среднеквадратичная ошибки модели по i-му выходу $(i = \overline{1,m})$; y_{ij}, y_{ij}^{M} - значение i-го выхода объекта и модели в j-ом опыте $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,l})$; Δy_i - максимальное изменение i-го выхода объекта $(i = \overline{1,m})$ при допустимых значениях входов x_k $(k = \overline{1,n})$ из области D_x.

Если величины этих ошибок меньше некоторого заданного положительного числа, то модель адекватна объекту.

Теперь рассмотрим оценку модели динамического объекта. Положим, что после идентификации получена модель одномерного объекта в форме линейного дифференциального уравнения вида.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_M(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x_M(t)}{dt^k}, \qquad (10.1)$$

где $x_M(t)$ - входной сигнал модели;

$y_M(t)$ - выходной сигнал модели;

n,m - наивысшие порядки производных;

$y_M(t)$ и $x_M(t)$ соответственно $(m \le n)$.

Пусть получены реализации входа $x(t)$ и выхода $y(t)$ объекта на отрезке времени $t \in [0, T]$, где T - длина реализации (время наблюдения). Теперь качество модели можно оценить путем сравнения $y_M(t)$ и $y(t)$ либо непосредственно на графике (визуально),либо введя некоторую формальную меру расстояния между этими сигналами.

Выходные сигналы объекта и модели при одном и том же входном сигнале различаются, так как их дифференциальные уравнения и начальные состояния неидентичны. Для оценки адекватности модели и объекта введем критерий их близости по разности выходных сигналов, т.е. реакций на один и тот же входной сигнал $x(t)$, например следующего вида:

$$I_x = \int_0^T F(y(t) - y_M(t))dt \quad , \tag{10.2}$$

где $F(\bullet)$ - некоторая выпуклая функция.

В частности:

$$F(y(t) - y_M(t)) = (y(t) - y_M(t))^2 \quad . \tag{10.3}$$

В общем случае оценка адекватности проводится для различных форм входного сигнала $x(t)$. Отсюда следует идея необходимости усреднения по входным сигналам и начальным условиям, т.е. введения операции математического ожидания оценки I_x:

$$I = M[I_x] = M[\int_0^T F(y(t) - y_M(t))dt] \quad . \tag{10.4}$$

Выражение выходного сигнала имеет довольно сложный вид, что затрудняет аналитическое исследование зависимости I от коэффициентов модели, поэтому вводятся и другие критерии. В частности, если уравнение модели имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y_M(t)}{dt^k} = x_M(t) \quad , \tag{10.5}$$

то для оценки близости модели и объекта удобным оказывается функционал от разности входных сигналов $(x_M(t) - x(t))$ модели и объекта, обеспечивающих один и тот же выходной сигнал:

$$I = M[\int_0^T F(x_M(t) - x(t))dt] \quad , \tag{10.6}$$

при условии, что $y_m(t) = y(t)$. В этом случае выходной сигнал модели и объекта будем обозначать $y(t)$.

Тогда, подставляя (10.5) в (10.6), имеем

$$I = M[\int_0^T F(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - x(t))dt] \quad , \tag{10.7}$$

т.е. функционал в явном виде зависит от коэффициентов модели, что удобно для аналитического исследования.

Развивая эту идею, можно формализовать удобный функционал для общего случая модели (10.1)

$$I = M[\int_0^T F(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k})dt] \quad . \tag{10.8}$$

Выражение:

$$\Delta = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} - \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \qquad (10.9)$$

называется обобщенной ошибкой модели. В качестве функции $F(\bullet)$, как правило, принимают квадрат обобщенной ошибки

$$I = M[\int_0^T \Delta^2(t)dt]. \qquad (10.11)$$

Этот функционал удобен тем, что в явном виде зависит от параметров модели и от доступных измерению входного и выходного сигналов объекта. Однако при вычислении этого функционала возникают определенные трудности, связанные с дифференцированием сигналов $x(t)$ и $y(t)$, а также с необходимостью выполнения операции математического ожидания.

Однако по условиям физической реализуемости можно создавать лишь устройства, порядок числителя которых меньше(или равно) порядка знаменателя, т.е. можно реализовать устройства с операторами

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^k \Big/ D(p) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{m} b_k p^k \Big/ D(p),$$

где $D(p)$ - многочлен степени больше или равно n; $m \le n$.

Тогда структурная схема вычисления обобщенной ошибки $\tilde{\Delta}(t)$ и оценки критерия $\tilde{I}$ будет иметь вид, представленной на рисунке 10.3.

Структурной схеме, изображенной на рисунке 10.3, эквивалентна схема, приведенная на на рисунке 10.4.

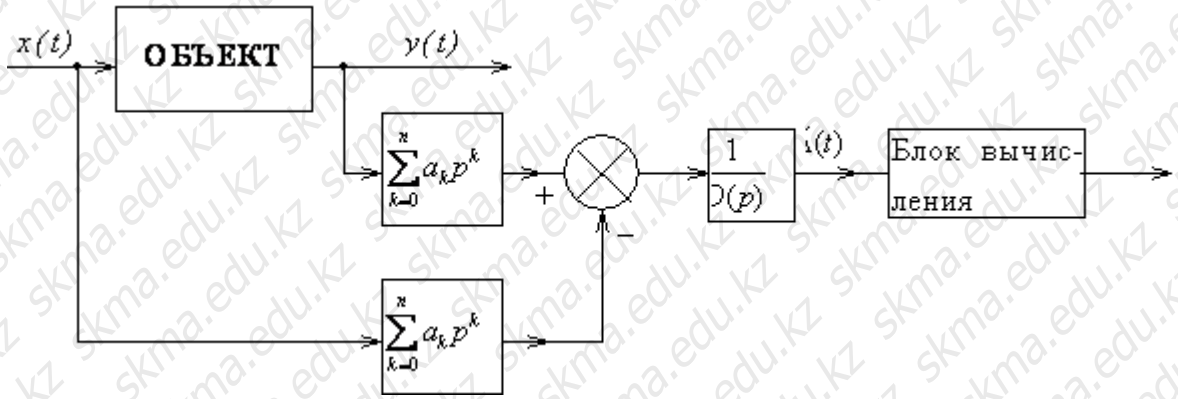


Рисунок 10.4 – Эквивалентная структурная схема вычисления обобщенной ошибки

Таким образом, обобщенная ошибка $\tilde{\Delta}(t)$, измеряемая с помощью физически реализуемых устройств, отличается от обобщенной ошибки $\Delta(t)$ тем, что $\tilde{\Delta}(t)$ является результатом преобразования $\Delta(t)$ фильтром с передаточной функцией $1/D(p)$. В силу

конечности полосы пропускания этого фильтра происходят искажения сигнала обобщенной ошибки. Эти искажения будут тем меньше, чем больше полоса пропускания фильтра.

Если величина ошибок модели и оценок критериев приближения удовлетворяют требованиям к качеству модели, то модель считается адекватной объекту и может быть использована для решения задач моделирования, оптимизации и управления. В противном случае модель необходимо усовершенствовать путем изменения структуры и введения в нее неучтенных ранее факторов.

Структурная и параметрическая идентификация. Моделирование (в широком смысле) является основным методом исследований во всех областях знаний и научно обоснованным методом оценок характеристик сложных систем, используемым для принятия решений в различных сферах инженерной деятельности. Существующие и проектируемые системы можно эффективно исследовать с помощью математических моделей (аналитических и имитационных), реализуемых на современных ЭВМ, которые в этом случае выступают в качестве инструмента экспериментатора с моделью системы.

Идентификацией называется нахождение оптимальной в некотором смысле модели Am (или оценки F оператора) объекта являющейся функцией входных (U) и выходных (Y или X) параметров системы, построенной по результатам наблюдений над входными и выходными переменными объекта.

Полученная модель, (в случае ее адекватности исследуемому объекту) в основном, предназначена для замены реального объекта в задачах управления, прогноза, конструирования, поиска оптимальных режимов и условий, имитации явлений и устройств и т.п.

Задачей идентификации называется **обратная** задача системного синтеза.

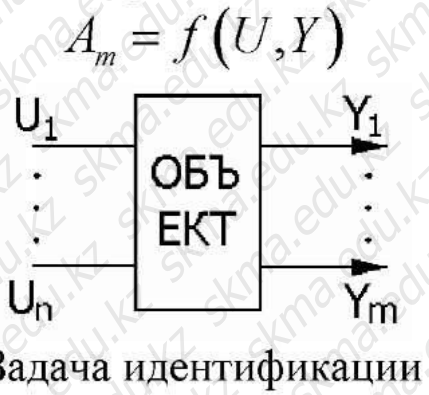


Рисунок 10.2 – Задача идентификации

Среди задач идентификации выделяют два типа (проблемы):

1. **структурная** идентификация (в широком смысле слова);
2. **параметрическая** идентификация (идентификация в узком смысле слова).

Структурная идентификация подразумевает построение модели типа «черный ящик», т.е. информация об объекте отсутствует полностью или частично. Главная задача структурной идентификации - определение структуры модели (см. рисунок 10.5).

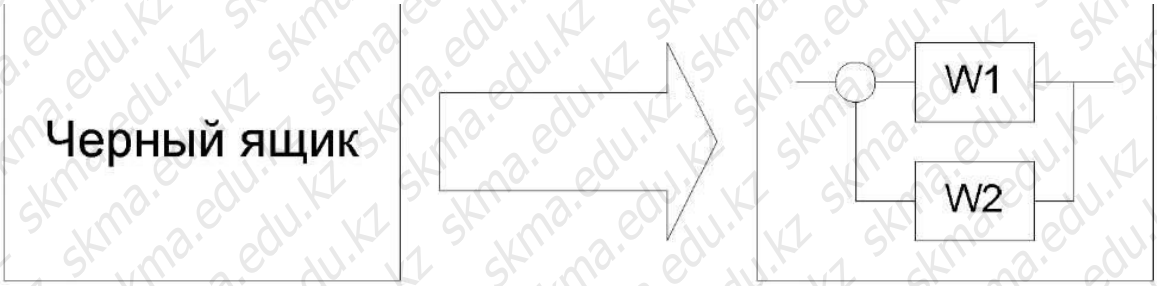
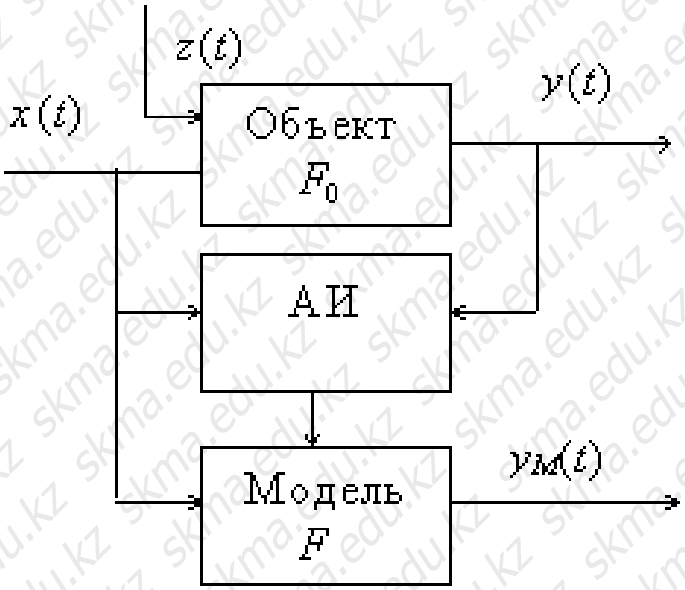


Рисунок 10.5- Структурная идентификация

Первая проблема - **структурная идентификация** является, по существу, основной проблемой всего процесса моделирования состоящего из следующих четырех основных этапов:

- постановка задачи
- выбор структуры модели и математическое описание ее блоков;
- исследование модели;
- экспериментальная проверка модели.

Структура модели ещё не сама модель, и для определения ее параметров необходимо располагать измерениями. Задачу определения параметров модели по наблюдениям работы объекта при заданной структуре модели называют идентификацией в узком смысле или параметрической идентификацией. Например, известна система уравнений, описывающая некоторый объект. Необходимо определить только коэффициенты уравнений. Процедура структурной идентификации показана на рисунке 10.6



АИ – алгоритм идентификации
Рисунок 10.6 – Процедура идентификации

Вторая проблема (**параметрическая** идентификация) при заданной структуре модели поддается формализации и смыкается с четвертым этапом моделировании.

Таким образом, по отношению к многоэтапному процессу моделирования в целом идентификация выступает как инструмент проверки гипотез о соответствии структуры или параметров объекта и модели на основе экспериментальных данных о его

функционировании. Характер и степень несоответствия используются при этом для принятия содержательных или формализованных решений по корректировке модели (см. рисунки 10.7 и 10.8)

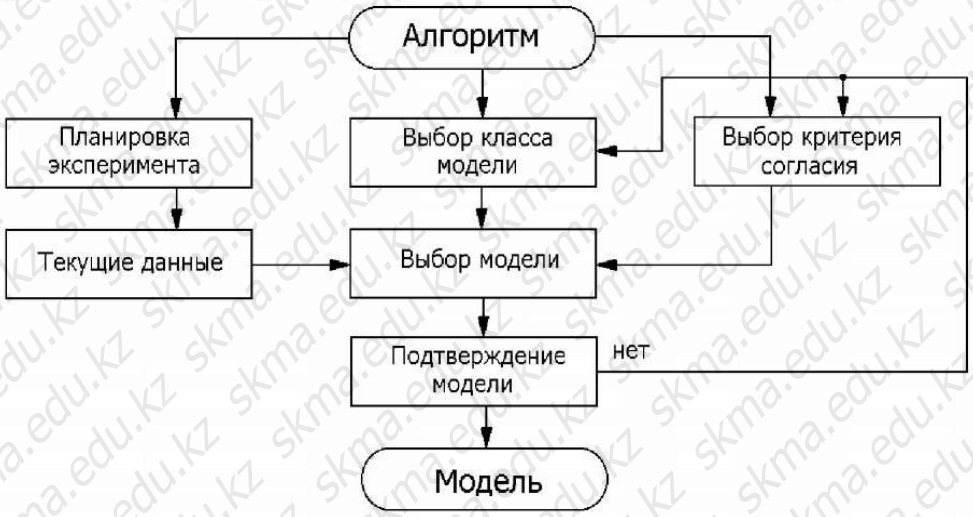


Рисунок 10.7 - Общая схема идентификации модели

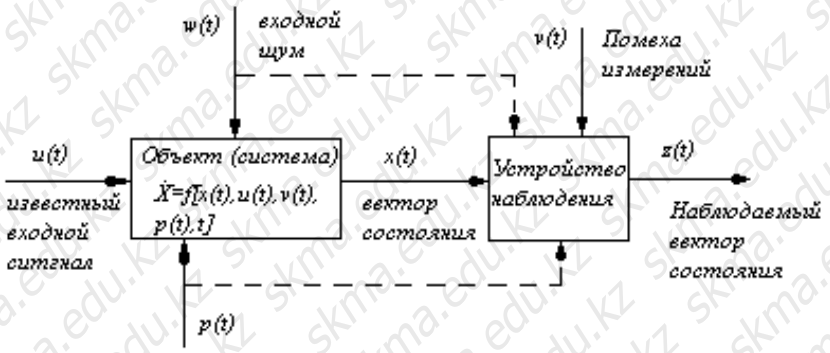


Рисунок 10.8 - Структурная схема идентификации модели

На этом рисунке - текущие данные могут быть получены в результате пассивного или активного эксперимента. Пассивный эксперимент, когда исследователь не влияет на процедуру регистрации (изменения) данных. Активный эксперимент, когда исследователь формирует программу эксперимента.

Построение моделей опирается в основном на данные наблюдений. Существует два способа (а также комбинации) формирования математических моделей.

В первом способе исследуемая система расчленяется на такие подсистемы, свойства которых очевидны из ранее накопленного опыта. По существу, это означает, что мы опираемся на известные законы природы и другие надежные соотношения, основанные на ранее проведенных экспериментальных исследованиях. Формальное математическое объединение этих подсистем становится моделью всей системы. Такой подход называется моделированием или аналитическим методом построения моделей. В его рамках проведение натурного эксперимента не обязательно. Конкретный вид процедуры моделирования сильно зависит от прикладной задачи и часто определяется традиционными и специфическими средствами из рассматриваемой прикладной области. Основной прием сводится к структуризации процесса в виде блок-схемы, блоки которой состоят из более простых элементов. Процесс восстановления системы по этим простым

блокам чаще всего выполняется с помощью ЭВМ и приводит не к математической, а к машинной модели системы.

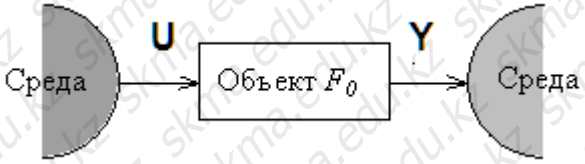


Рисунок 10.9 - Взаимодействие идентифицируемого объекта со средой

Рисунок 10.9 иллюстрирует взаимодействие идентифицируемого объекта со средой. Это взаимодействие происходит по каналам U и Y. По каналу U – вход среда воздействует на объект, а по каналу Y (выход) объект воздействует на среду. Задача идентификации сводится к определению оператора модели F, связывающего вход и выход объекта Y = F(U).

Классификация методов идентификации.. В соответствии с современной теорией можно предложить следующую классификацию идентификации:

1) по конечному результату идентификации (структурная и параметрическая);

2) по способу изучения объекта идентификации (активная и пассивная)

3)по типу идентифицируемой модели (линейная и нелинейная; детерминированная и стохастическая; с непрерывным и дискретным временем; стационарная и нестационарная; одномерная и многомерная; статическая и динамическая; с сосредоточенными и распределёнными параметрами).

Активная и пассивная идентификация. Успех идентификации объекта существенно зависит от соотношения двух факторов: объема априорной информации о структуре объекта и объема измерительной информации. Априорные сведения помогают определить структуру модели, т.е. ее вид (число входов и выходов, характер связи между ними). При **активном** способе идентификации реализация входа формируется самим исследователем путем подачи на вход объекта испытательного сигнала желаемой формы (скачкообразного сигнала, импульсного сигнала, сигнала в виде гармонических, прямоугольных, трапецеидальных, треугольных колебаний и др.). На рисунке 10.10 показана связь между априорной информацией (о структуре) и апостериорной информацией об измерениях) при построении модели. Верхняя часть рисунка иллюстрирует процесс построения модели как конкретный пример использования физических законов с последующей линеаризацией и преобразованием к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Получаю щиеся уравнения определяют структуру модели. На каж- дом шаге возникают ошибки. В нижней части рисунка иллюстрируется процедура оценивания, основанная на **измерениях и** включающая обработку данных **и** алгоритмы **оценивания.** Здесь также следует учесть различные виды ошибок.

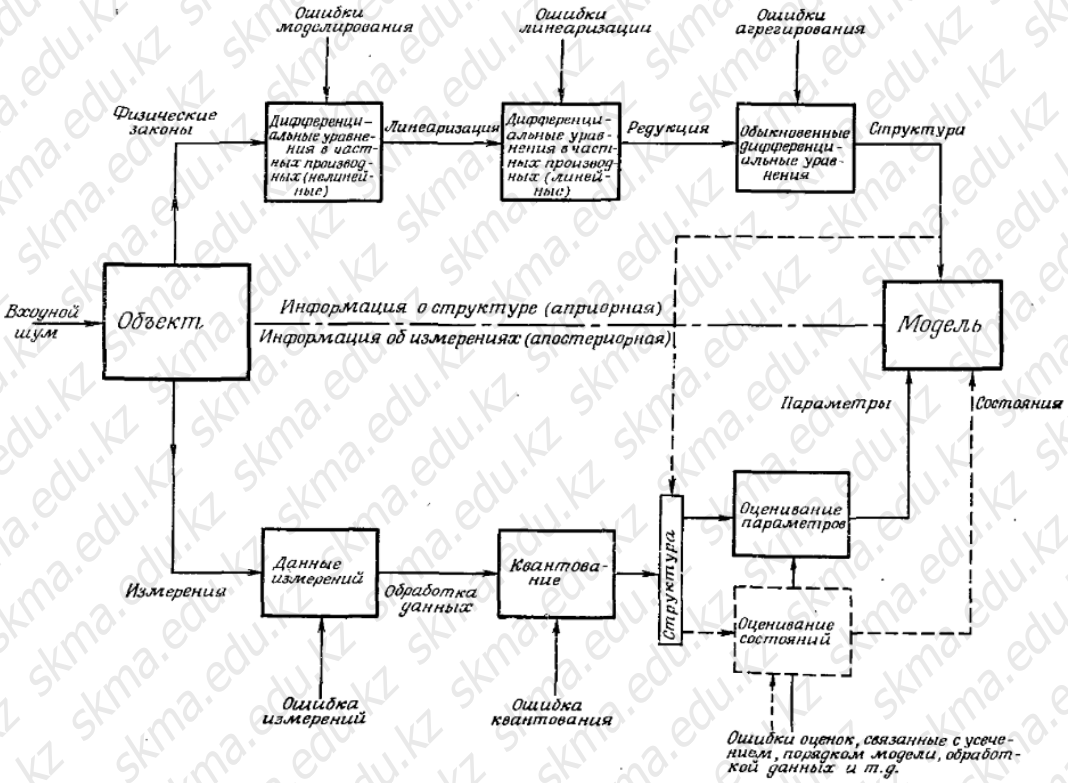


Рисунок 10.10 - Связь между априорной информацией (о структуре) и апостериорной информацией об измерениях)

Контрольные вопросы

1 Этапы идентификации;
2 Критерии и показатели качества идентификации;
3 Структурная и параметрическая идентификация;
4 Активная и пассивная идентификация.

Литература

Основная литература

1. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009
2. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.

Дополнительная литература

3. Бокс Дж, Дженкинс. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 2. –М.: Мир, 2017, 193с
4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 1997

Лекция 11 Проблема идентифицируемости

Цель: Рассмотреть проблемы идентифицируемости; системные условия идентифицируемости в разомкнутых системах; системные условия идентифицируемости линейных замкнутых систем; понятие вероятностной идентифицируемости.

Тезисы

Условия идентифицируемости линейных динамических систем.

Рассмотрим задачу идентификации параметров математической модели, заданной в виде системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax\,.$$

Состояние системы задается вектором x(t) n- мерного эвклидового пространства и известны путем измерений следующие векторы

$$x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}, \dddot{x}, ..., \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \qquad (11.1)$$

Задача состоит в нахождении такой матрицы А, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax \\ &\ddot{x} = A\dot{x} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{d^n x}{dt^n} = A\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{aligned} \qquad (11.2)$$

Состояние системы, заданное известными векторами (11.1), назовем идентифицируемым, если для него существует матрица А, удовлетворяющая равенствам (11.2).

(11.3)

Условие существования решения задачи идентификации, т.е. систем (3), можно записать в виде

$$\det(x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \neq 0 \qquad (11.4)$$

Из соотношений (11.3) параметры модели можно определить по формулам

$$a_j = \begin{bmatrix} x^\tau \\ \dot{x}^\tau \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x^\tau}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{dt} \\ \dfrac{d^2x_j}{dt^2} \\ \vdots \\ \dfrac{d^nx_j}{dt^n} \end{bmatrix}; \text{ для j =1,2,..., n} \qquad (11.5)$$

Подставим соотношения (11.2) в условие (11.4), получим неравенство:

$$\det (x, Ax, \dots , An\text{-}1x) \neq 0 \qquad (11.6)$$

Укажем на связь между задачами идентификации и управляемости. Эта связь формулируется так:

- для существования решения задачи идентификации в виде математической модели $\dot{x} = Ax$
- при наблюдении вектора состояния x(t) достаточно, чтобы матрица A и вектор x(t) удовлетворяли условия вполне управляемости
  $\det (b, Ab, \dots , An\text{-}1b) \neq 0$
  где b = x(t).

Поскольку матрица A наперед неизвестна, то на практике условия идентификации проверяют на основании условия (4).

Для дискретных линейных систем управления определение **идентифицируемости** формулируется следующим образом: если по известным значениям векторов x(k), x(k+1), ... , x(k+n) состояние дискретной линейной стационарной системы n-го порядка

$$x(k+1) = Ax(k)$$

можно восстановить матрицу A, то систему называют идентифицируемой.

Теорема. Решение задачи идентификации дискретной линейной системы имеет место, если

$$\det (x(k), x(k+1), \dots , x(k+n-1)) \neq 0$$

Понятие вероятностной идентифицируемости.

Отправная точка в суждениях о потенциальной идентифицируемости системы безотносительно к методу восстановления ее параметров - как и управляемость или наблюдаемость - это свойство сугубо потенциальное, состоит в доказательстве отсутствия другой какой-либо другой системы на выбранном классе систем, которая ведет себя точно также, как и исходная система, и, следовательно, такие системы принципиально неразличимы в выбранных для идентификации условиях. Восстановить однозначно параметры такой системы нельзя. Этот подход позволяет доказать ряд теорем и вывести критерии, сходные с критериями Калмана и Ли. Существуют и принципиально

неидентифицируемые системы, для которых невозможно выбрать подходящие условия, ведущие к их идентификации. Всегда находится какой-либо смежник. Покажем это.

Идентифицируемость автономных систем. Модель линейной автономной динамической системы имеет вид:

$dx/dt=Ax$,

где x - вектор состояния (пространства R^n), $x_0=x(0)$.

Определение. Линейная автономная динамическая система называется полностью идентифицируемой по состоянию, если при заданном векторе начальных условий x_0 матрица ее параметров A может быть однозначно восстановлена по временной последовательности x=x(t).

Иначе, тоже следуя калмановской традиции, пара (A,x_0) полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда множество пар, объединенных общностью интегральной кривой x=x(t), вырождается в точку. В противном случае указанная пара неидентифицируема. Публикуемый ниже критерий идентифицируемости напоминает критерии управляемости и наблюдаемости.

Теорема 1. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары (A,x_0) состоит в следующем:

$$\mathrm{rank}[x_0\ Ax_0\ A^2x_0\ \dots\ A^{n-1}x_0] = n,$$

где n - порядок системы. Матрицу, выписанную в квадратных скобках, будем называть матрицей идентифицируемости и обозначать W.

Доказательство. Опирается на разложение матричной экспоненты в конечную сумму слагаемых

$e^{At}=_0\sum^{m-1}\alpha_k(t)A^k$,

где m - степень минимального аннулирующего полинома A, $\alpha_k(t)$ - коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа-Сильвестра для экспоненциальной функции, определенной на спектре A.

У пар (A,x_0) и (B,x_0), объединенных общностью интегральной кривой, равны и производные процессов, т.е. $Ax(t)=Bx(t)$, где $x(t)=e^{At}x_0$. Функции $\alpha_k(t)$ линейно независимы между собой на любом интервале времени, что позволяет перейти к матричному уравнению:

$$(A-B)[x_0\ Ax_0\ A^2x_0\ \dots\ A^{m-1}x_0]=0.$$

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары $((A,b,c),x_0)$ состоит в следующем:

$$\mathrm{rank}[x_0\ Ax_0\ A^2x_0\ \dots\ A^{n-1}x_0\ b\ Ab\ A^2b\ \dots\ A^{n-1}b] = n,$$

где n - порядок системы. Наблюдаемость системы при этом подразумевается, поэтому запишем иначе $\mathrm{Rank}\ W_o=n$, $\mathrm{Rank}\ [W\ W_c]=n$.

Доказательство. Ассиметричное по отношению к матрице наблюдаемости вхождение матрицы управляемости в критерий идентифицируемости диктуется разным значением проблем управляемости и наблюдаемости для нужд идентификации. Ненаблюдаемые системы содержат части, параметры которых восстановить невозможно, поэтому критерий наблюдаемости выписывается особняком как предварительное условие. Вектор

состояния канонической формы наблюдаемости можно восстановить, не зная параметров системы, например, при импульсном воздействии.

Нестационарные системы. Если характер нестационарности неизвестен, параметры нестационарной линейной динамической системы восстановить невозможно, поскольку уравнения по одной точке процесса заведомо неразрешимы. В данном случае имеет смысл указать на смысл грамиана идентифицируемости, аналогичному грамианам управляемости и наблюдаемости. В стационарном случае все более или менее прозрачно - все равно, что проверять, грамиан или системную матрицу.

Эта особенность нестационарных систем поясняет, почему бессмысленно приводить графики "отслеживания" параметров.

Подведем некоторый итог. **Управляемость.** Понятие наблюдаемости и дуальное ему понятие управляемости были впервые введены Калманом в 1960 г. Хотя при обсуждении методов идентификации понятие наблюдаемости важнее понятия управляемости, оба они ввиду их дуальности рассматриваются совместно.

Говорят, что система является управляемой, если она может быть переведена из любого состояния $x(t_o)$ при $t=t_o$ в любое другое желаемое состояние $x(t_i)$ за конечный интервал времени τ ($\tau = t_i - t_o$) путем приложения кусочно-непрерывного входного воздействия/

Контрольные вопросы

1 Условия идентифицируемости линейных динамических систем
2 Идентифицируемость автономных систем;
3 Понятие вероятностной идентифицируемости;
4 Понятие наблюдаемости и дуальное ему понятие управляемости.

Литература

Основная литература

1. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009
2. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.

Лекция 12 Структурная статистическая идентификация

Цель: Рассмотреть структурную статистическую идентификацию; статистические критерии тесноты связи; критерии и методы ориентации причинно-следственных отношений координат модели; организация статистической процедуры принятия решений на этапе идентификации структуры модели.

Тезисы

Прежде чем применять методы параметрической идентификации, необходимо определить структуру модели. Это одна из основных проблем теории идентификации. Как правило, в большинстве работ по синтезу математических моделей структура постулируется априори с точностью до некоторого множества неизвестных параметров. В дальнейшем это множество является основным объектом исследования. Это не означает, что методам идентификации структурной идентификации не уделялось внимания. Доминирующим подходом при выборе структуры является статистический подход и решение принимается на заданном классе моделей-претендентов. Но какие-либо формализованные подходы и методы, позволяющие выбрать структуру модели на основе доступного для наблюдения информационного множества объекта, отсутствуют. Это объясняется тем, что некоторые элементы структуры модели не поддаются адекватной математической трактовке. Поэтому структурное множество часто сужают до таких математических категорий и объектов, которые можно описать на существующем математическом языке и, следовательно, задать на классе функций из заданного множества.

С учетом многообразия методов структурной идентификации, очевидно, наиболее приемлемой основой для такой классификации являются свойства объектов, так как это дает возможность целенаправленно выбирать методы, позволяющие рациональным путем решить поставленные задачи для конкретных объектов.

Следует различать, как уже отмечалось выше, проблему идентификации в широком смысле – структурную идентификацию – и идентификацию в узком смысле (в малом) – параметрическую идентификацию.

Структурная идентификация на основных этапах моделирования.

Первая проблема (структурная идентификация) является, по существу, основной проблемой всего процесса моделирования, состоящего из рассмотренных в гл. I следующих четырех основных этапов:

1. постановка задачи
2. выбор структуры модели и математическое описание ее блоков;
3. исследование модели;
4. экспериментальная проверка модели.

По крайней мере, с этой проблемой смыкаются три первых этапа моделирования. Полная формализация этой проблемы вряд ли возможна из-за большого многообразия и практически неисчерпаемой сложности реальных объектов. Здесь велика роль профессионализма исследователя, знание физического механизма процессов, правильной формулировки цели и постановки задачи.

Параметрическая идентификация. Вторая проблема (параметрическая идентификация) при заданной структуре модели поддается формализации и смыкается с четвертым этапом моделирования, ей посвящено **большинство публикаций** по методам идентификации.

Организация статистической процедуры принятия решений на этапе идентификации структуры модели.

Этапы структурной идентификации. Задачи вскрытия структуры объекта. Роль структуры модели трудно переоценить, неудачный выбор ее сводит на нет и все результаты параметрической идентификации.

Среди задач вскрытия структуры объекта можно отметить следующие:

1. выделение объекта из среды;
2. ранжирование входов и выходов объекта по степени их влияния на конечный целевой показатель;
3. определение рационального числа входов и выходов объекта, учитываемых в модели;
4. определение характера связи между входом и выходом модели объекта, т. е. вида оператора системы

Рассмотрим коротко каждую из этих задач.

Выделение объекта из среды. Описание процесса Процесс выделения объекта из среды, прежде всего, определяется целями, для которых строится модель. Цель по отношению, например, к управлению имеет внешний характер. Она формулируется на более высоком иерархическом уровне и выражает его требования к объекту управления. В то же время определение целей связано с представлениями об объекте, в котором должны быть реализованы эти цели, т. е. нельзя эффективно сформулировать цель, не имея какой-то модели объекта управления. Следовательно, еще до формулирования цели должна быть некоторая, хотя бы приближенная, модель, которая используется для определения объекта управления. Выделение объекта из среды или разделение на подобъекты (в случае сложного объекта) должно осуществляться таким образом, чтобы он имел минимум связей со средой или с другими подобъектами (звеньями). **Пример выделения объекта из среды.** Рассмотрим в качестве примера процесс нагрева металла в камерной печи. Допустим, целью управления является получение равномерно прогретой до определенной температуры заготовки (в смысле близости температур поверхности и центра). Если при этом в качестве объекта управления выделить лишь саму заготовку, то можно легко убедиться, что из-за отсутствия соответствующих ресурсов управления заданная цель не достижима. Входным параметром этого объекта является температура поверхности заготовки, теснейшим образом связанная с температурой рабочего пространства, а выходным – температура центра. Здесь в лучшем случае, можно за счет фактора времени добиться выравнивания этих температур при их заранее неопределенном уровне. Проблема существенно не меняется и в том случае, если за счет расширения объекта включить в его состав температуру рабочего пространства, поскольку последняя не является независимым управляющим воздействием

Ранжирование входов и выходов и определение их рационального числа. Важное значение для определения структуры модели, которая на первых этапах исследования может быть представлена в виде многополюсника, является отбор входов и выходов объекта, которые будут включены в модель. Для этого сначала определяются все входы и выходы, состояние которых в какой-то степени влияет на выполнение цели в объекте (например, цели управления). Затем среди них отбираются наиболее существенные, которые и образуют многополюсник модели с размерностью $П \times Т$ Отбор существенных факторов является непростой процедурой.

. Исследование ошибок и остатков. Под остатками ε_i понимается разность между фактически измеренными y_i и предсказанными с помощью модели (например, регрессионного уравнения) $\hat{y}_i$ n значениями выходного параметра. Это величины, которые

не удается объяснить с помощью регрессионного или какого-либо другого уравнения, т. е. остаточные ошибки модели.

Относительно ошибок делаются следующие предположения: ошибки независимы, имеют нулевые средние, постоянную дисперсию и подчиняются нормальному закону распределения. Последнее необходимо в случае использования -критерия.

Если подбираемая модель находится в удовлетворительном соответствии с объектом, остатки должны проявлять тенденцию к подтверждению сделанных нами предположений или, по меньшей мере, не должны противоречить им.

Формулируется следующий вопрос: «Не доказывают ли остатки, что наши предположения ошибочны?»

После исследования остатков можно прийти к одному из следующих выводов:

1. предположения, по-видимому, нарушены (в некотором смысле)
2. предположения, по-видимому, не нарушены.

Последнее не означает, что мы пришли к выводу о правильности предположения, мы не имеем основания для утверждения о неправильности.

Графические процедуры исследования ошибок и остатков. Основные виды графиков остатков. Процедуры исследования остатков с целью проверки модели носят графический характер, что дает возможность осуществлять не только количественный, но и качественный (содержательный) анализ степени идентичности модели и объекта.

Основные виды графиков остатков:

1. общий; например, гистограмма распределения;
2. в зависимости от времени или номера опытов, если известна их последовательность;
3. в зависимости от предсказываемых значений $\hat{y}_i$;
4. в зависимости от входных факторов x_{ji};
5. любой вид графика, который целесообразен для данной конкретной задачи.

Рассмотрим конкретнее некоторые из указанных видов графиков.

Гистограмма распределения. Гистограмма распределения. Она строится следующим образом. Весь диапазон изменения переменной, в нашем случае ошибки модели, разбивается на ряд равных интервалов (обычно на 10 – 15), которые откладываются на оси абсцисс, а на оси ординат отмечается частота попадания ошибки в каждый из этих интервалов (число случаев). Например, гистограмма, изображенная на рисунке 12.1,а, имеет симметричный характер и не дает каких-либо оснований для суждений о неправильности наших предположений.

Несимметричный характер гистограммы или наличие второго “горба” (рисунок. 12.1,б), может свидетельствовать о том, что в модели не учтена какая-то неслучайная составляющая и требуется более глубокий анализ ошибки модели.

График временной последовательности.

График временной последовательности. Возможно, несколько характерных случаев зависимости остаточной ошибки от времени или других перечисленных выше факторов. Рассмотрим их сначала для временной зависимости, пример которой приведен на рис.12.2, а.

В случае (б) эффект времени не влияет на ошибку и не дает каких-либо оснований для принятия решения о целесообразности дальнейшего совершенствования модели.

В случае (в) **дисперсия** не постоянна, а растет со временем, что вызывает необходимость использования взвешенного **метод наименьших квадратов.**

В случае (г) целесообразно включить в **модель** линейный член от времени.

В случае (д) в **модель** должны быть включены линейный и квадратичный члены от времени.

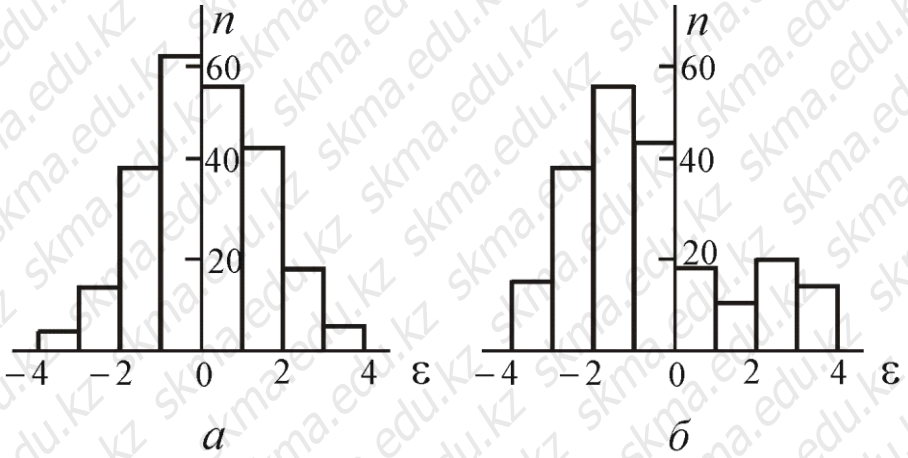


Рисунок 12.1 - Гистограммы распределения

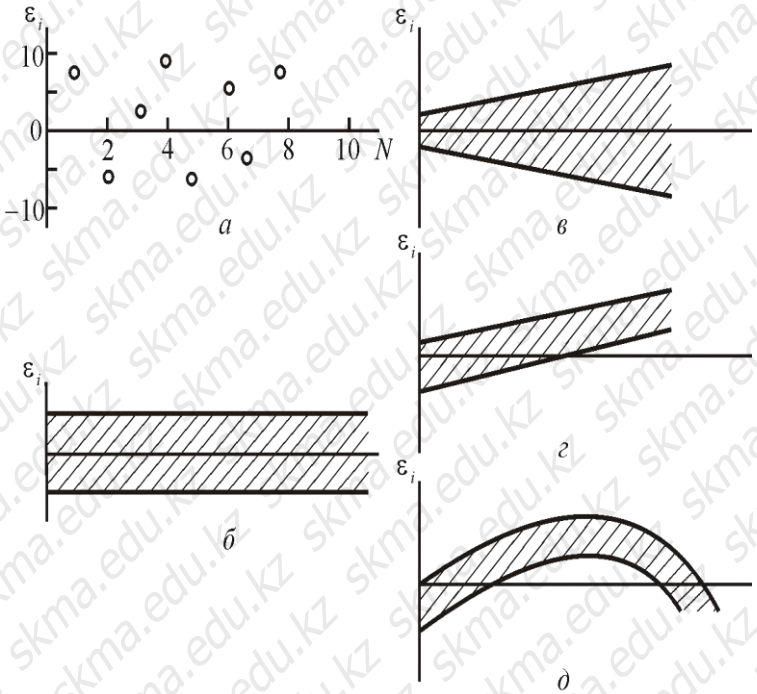


Рисунок 10.2 - Характерные случаи распределения остаточной ошибки

Возможны также различные сочетания рассмотренных случаев.

График зависимости остатков от $\hat{y}_i$ (рисунок. 12.3).

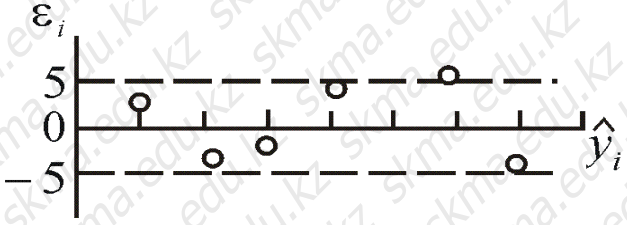


Рисунок 12.3 - Зависимость остатков от предсказанного значения выхода

Попадание большинства данных в горизонтальную полосу свидетельствует, что наши предположения, по-видимому, оправданы. Графики для случаев, когда предположения оказываются неоправданными, могут иметь вид аналогичный рассмотренным выше (рисунок. 12.2, в, г, д).

Прочие методы, эффективность, выбросы.

Среди других видов графиков можно отметить группировку остатков для разных агрегатов, печей, смен, бригад, времен года, на серии положительных и отрицательных остатков и т. д.

Эффективным при последовательном совершенствовании моделей может оказаться введение в рассмотрение новой переменной. Строится график зависимости ε_i от новой переменной, не включенной в рассматриваемую **модель**. Если такая зависимость обнаруживается, целесообразно ввести в **модель** соответствующие члены для учета этой переменной.

Большой интерес при исследовании остатков могут представить выбросы – значительные отклонения параметров от установленного **закона распределения**. С точки зрения получения устойчивых средних значений по большому ансамблю данных выбросы за зону шириной $\pm 3\sigma$, где σ – среднее квадратическое отклонение, рекомендуется не учитывать, делая предположения, что они являются результатами каких-либо промахов в постановке и проведении экспериментов.

Контрольные вопросы

1 Структурная статистическая идентификация;
2 Статистические критерии тесноты связи;
3 Критерии и методы ориентации причинно-следственных отношений координат модели;
4 Организация статистической процедуры принятия решений на этапе идентификации структуры модели;
5 Примеры выделения объекта из среды;
6 Графические процедуры исследования ошибок и остатков;
7 Эффективность при последовательном совершенствовании моделей введение в рассмотрение новой переменной.

Литература

Основная литература

1. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009
2. Эйкхоф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с.

Дополнительная литература

3. Карабутов Н. Н. Структурная идентификация систем: Анализ динамических структур М.: МГИУ, 2008. – 160 с.
4. Карабутов Н. Н. Структурная идентификация систем: Анализ информационных структур. МГИУ,2009. 176 с.
5. Материалы с сайта http://www.matematicheskoe-modelirovanie.ru/kniga

Лекция 13 Оценивание параметров и состояния объектов

Цель: Рассмотреть материалы следующего характера: оценивание параметров и состояния объектов; фильтр Калмана-Бьюси; одновременное оценивание параметров и состояний; методы квазилинеаризации.

Тезисы

Оценивание параметров и состояния объектов производится на стадии параметрической идентификации.

Для решения задач параметрической идентификации разработано большое число методов, учитывающих особенности объектов, условия их функционирования, способ тестирования и математическую основу анализа экспериментальных данных, вид получаемых моделей и т. п. Методы параметрической идентификации можно характеризовать различными признаками. По способу тестирования исследуемого объекта методы идентификации делятся на активные и пассивные.



Методы идентификации часто различают также по признаку, указывающему на их приспособленность к исследованию динамических объектов того или иного класса. Важной особенностью при идентификации является наличие или отсутствие процедур сравнения получаемой модели с объектом. Это определяет соответственно две возможные структуры построения систем идентификации: по разомкнутой и замкнутой схемам.

Результатом решения задачи идентификации является математическая модель, представленная во временной или частотной области. При этом полученная модель адекватна объекту по поведению, т. е. по динамическим свойствам, в соответствии с выбранным при идентификации критерием подобия.

Винеровское оценивание — задача нахождения импульсной характеристики линейной стационарной системы, которая минимизирует среднюю квадратическую ошибку между реальным y(t) и желаемым d(t) выходными сигналами при бесконечном времени

наблюдения. На вход системы подается сигнал f(t), выходной сигнал определяется выражением:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

Предполагается, что условия применения, характер сигналов и помех остаются достаточно стабильными, их статистические характеристики меняются мало. Если же условия переменны и помехи в процессе работы систем изменяются существенно, то возникает необходимость автоматической оптимизации параметров систем. Это осуществляется в различного рода экстремальных, адаптивных, обучаемых системах. Во время второй мировой войны перед американским математиком Н. Винером встала задача отделения полезного сигнала от шума при решении задач автоматизации систем противовоздушной обороны, использующих радиолокационную технику. **Уравнение Винера – Хопфа.** В основе статистических методов определения импульсной переходной функции объекта лежит интегральным уравнением Фредгольма $(-\infty < t < \infty)$ или интегральное **уравнение Винера-Хопфа** (t>0):

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - t) g(t) dt \approx \int_{0}^{T} R_{xx}(\tau - t) g(t) dt, \qquad \text{(УВХ)}$$

где $g(t)$ - импульсная характеристика объекта, весовая функция.

Определенная из этого уравнения $g(t)$ является наилучшей в смысле среднеквадратичной оценки. В уравнении (УВХ) обозначено *Rxy* - взаимная корреляционная функция выхода и входа; *Rxx* - корреляционная функция входного сигнала.

Решение уравнения (УВХ) с целью определения $g(t)$ проводят различными методами, например: методом подбора ординат импульсной функции на управляемом фильтре (требует специальную аппаратуру); методом сведения уравнения (УВХ) к системе линейных алгебраических уравнений (см. ниже); методом преобразования Фурье.

УВХ было получено Винером и Хопфом при решении задачи радиационного равновесия внутри звезд. Также используется в кибернетике, при решении задачи выделения, фильтрации полезного сигнала из его смеси с шумом.

Напомним, что выход $x(t)$ линейного объекта, имеющего вход $y(t)$ определяется интегралом свертки:

$$x(t) = \int_{0}^{t} g(t-\tau) y(\tau) d\tau = \int_{0}^{t} g(\tau) y(t-\tau) d\tau \qquad \text{(УС)}$$

Фильтр Винера .Во время второй мировой войны Винер выполнил свои фундаментальные, ставшие теперь классическими исследования по интерполяции, экстраполяции и сглаживанию временных рядов. Фильтр Калмана позволяет получить решение, сформулированное в пространстве состояний. В отличие от метода Винера фильтр Калмана легко распространяется на случай нестационарных сигналов

Фильтр Калмана-Бьюси. В 1960 году . Рудольф Калман предложил алгоритм решения фдачи линейной оптимальной фильтрации для дискретных нестационарных гауссовских случайных процессов. А в 1961 году совместно с Р. Бьюси он опубликовал алгоритм решения задачи для непрерывного времени]. Р. Калман несколько изменил

постановку задачи линейной оптимальной фильтрации. Он вместо математического ожидания и ковариации для описания оцениваемого случайного процесса x(t, ω) применил формирующий фильтр - динамическую систему. возбуждаемую белым гауссовским шумом. В результате был получен рекуррентный алгоритм решения задачи оценивания в случае наличия белого шума в измерениях.

Проблема построения формирующего фильтра полностью решена лишь для стационарных случайных процессов, спектральная плотность которых допускает факторизацию. Но все же для большинства практических задач теории управления эту задачу удается успешно решать, а во многих случаях формирующий фильтр известен уже на стадии проектирования системы управления.

Фильтр Калмана — эффективный (имеющий способ гарантированно достигать результат за конечное число действий) рекурсивный фильтр, оценивающий вектор состояния динамической системы, используя ряд неполных и зашумленных измерений.. Фильтр Калмана широко используется в инженерных и эконометрических приложениях: от радаров и систем технического зрения до оценок параметров макроэкономических моделей. Калмановская фильтрация является важной частью теории управления, играет большую роль в создании систем управления. Совместно с линейно-квадратичным регулятором фильтр Калмана позволяет решить задачу линейно-квадратичного гауссовского управления.

Методы квазилинеаризации.

Метод квазилинеаризации впервые ввели Беллман и Калаба [1, 2] для решения краевых задач в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Применение этого метода для идентификации параметров нелинейных систем было рассмотрено в основном в работах [3—6].

Может быть учтена и нестационарность параметров, если они изменяются медленно в сравнении со скоростью сходимости процедуры идентификации. Сходимость процедуры будет довольно высокой, если имеется близкое начальное приближение к величинам параметров, которые необходимо идентифицировать. Метод по своей сути является итерационным; он не требует введения специальных пробных воздействий и поэтому применим для использования в реальном масштабе времени.

Так как процедуры идентификации методом квазилинеаризации сходятся к истинным значениям параметров только тогда, когда начальные приближения величин параметров оказываются внутри области сходимости, для указанных процедур требуется определенная априорная информация о диапазоне значений параметров; в этом нет необходимости, если используются последовательные подходы, рассмотренные в гл. 6 и 7. Метод квазилинеаризации имеет особое значение в тех случаях, *когда различные переменные состояния системы не могут быть измерены одновременно во все моменты измерений.* В этом случае описание системы в пространстве состояний само по себе является многоточечной задачей, для которой применение метода квазилинеаризации естественно. Метод квазилинеаризации по своей сути является методом идентификации, основанным на фиксированном числе измерений, а не на последовательно возрастающем объеме измерений, как в гл. 6, 7. В том случае, когда имеется достаточное число измерений некоторых состояний, а измерения других состояний не проводятся, метод квазилинеаризации может дать оценки этих недостающих состояний и параметров одновременно

Применение метода квазилинеаризации позволяет одновременно получить оценку вектора параметров и вектора состояния системы на интервале идентификации.

Рассмотрим нелинейную систему, описываемую уравнением:

$$\dot{x} = f(x,u,q), \tag{13.1}$$

где: x – вектор состояния размерности n,;
u – вектор входных воздействий размерности m,;
q – вектор параметров системы размерности k,;

f – вектор-функция размерности n.

Предполагается, что векторы u и x измеряются (x может измеряться частично), а вид компонентов вектор-функции f известен. Вектор параметров q неизвестен и подлежит идентификации.

Полагаем, что компоненты вектора параметров q неизменны на интервале идентификации, то есть,

$$\Psi = \begin{bmatrix} f_1(\chi,u) \\ \vdots \\ f_n(\chi,u) \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{13.5}$$

Предположим, что уже найдена N-я итерация оценки вектора состояния (13.4) $\hat{\chi}_N$. Тогда, раскладывая уравнение (13.5) в ряд Тейлора относительно $\hat{\chi}_N$ и учитывая только члены первого порядка малости, получим $(N+1)$-ю оценку вектора:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{\Psi}_{N+1} = \hat{\Psi}_N + \frac{\partial \hat{\Psi}_N}{\partial \chi}(\hat{\chi}_{N+1} - \hat{\chi}_N), \tag{13.6}$$

где: $$\frac{\partial \hat{\Psi}_N}{\partial \chi} = \left.\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \chi}\right|_{\chi=\chi_N}, \qquad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \chi} = \left[\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \;\vdots\; \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial q}\right],$$

Уравнение (13.6) линейно относительно $\hat{\chi}_{N+1}$, поэтому его можно записать в виде:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{A}_N \hat{\chi}_{N+1} + \hat{V}_{N+1}, \tag{13.7}$$

где:

$$\hat{A}_N = \left.\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \chi}\right|_{\chi=\hat{\chi}_N}, \quad \hat{V}_N = \left.\hat{\Psi}\right|_{\chi=\ddot{\chi}_N} - \left.\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \chi}\right|_{\chi=\hat{\chi}_N} = \hat{\Psi}_N - \hat{A}_N \hat{\chi}_N .$$

Уравнение (13.7) линейное нестационарное. Его решение имеет вид:

$$\hat{\chi}_{N+1}(t) = X_N(t,t_0)\hat{\chi}_{N+1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_N(t,\tau)V_N(\tau)\,d\tau, \tag{13.8}$$

или

$$\hat{\chi}_{N+1}(t) = X_N(t,t_0)\hat{\chi}_{N+1}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X_N(t,\tau)\hat{\Psi}_N(\tau) - \int_{t_0}^{t} X_N(t,\tau)\hat{A}_N(\tau)\hat{\chi}_N(\tau)d\tau, \quad (13.9)$$

где $X_N(t,\tau)$ – фундаментальная матрица однородного уравнения:

$$\dot{\hat{\chi}}_{N+1} = \hat{A}_N\hat{\chi}_{N+!}\cdot \quad (13.10)$$

Для нахождения вектора χ размерности $n+k$ необходимо иметь $n+k$ измерений. Предположим, что измеряются компоненты вектора состояния $x_l(t_j)$, то есть, j-е компоненты вектора состояния в t_j моменты времени. Тогда вектор $\hat{\chi}_{N+1}(t_0)$ удовлетворяет многоточечному граничному условию

$$x_j(t_j) = X_{j,N}(t_j,t_0)\hat{\chi}_{N+1}(t_0) + \rho_{j,N}(t_j), \quad (13.11)$$

$$\rho_{j,N}(t_j) = \int_{t_0}^{t_j} X_{j,N}(t_j,\tau)V_N(\tau)d\tau. \quad (13.12)$$

В (13.11) и (13.12) через $X_{j,N}()$ обозначена j-я строка фундаментальной матрицы $X_N()$. Компоненты вектора состояния $x_j(t_j)$ могут быть одними и теми же или разными.

Так как имеется $n+k$ измерений, то уравнений (13.11) тоже $n+k$. По сути уравнения (13.11) являются линейными алгебраическими с $n+k$ переменными. Таким образом, $n+k$ измерений дает $n+k$ линейных алгебраических уравнений с $n+k$ неизвестными, составляющими вектор $\hat{\chi}_{N+1}(t_0)$. Этот вектор ищется, и последние k его компонентов представляют собой искомый вектор параметров q.

В блоке 4 производится решение уравнения с начальными приближениями $\hat{q}_{N+1}, x_N(t_0)$, которыми на первом шаге являются $\hat{q}_0, x_0(t_0)$.Решение производится на интервале $[t_0, t_{max}]$, где t_{max} –максимальное из времен t_j, в которые производятся измерения $x_j(t_j)$.

В блоке *5* решение $x(t)$, полученное в блоке *4*, подставляется в уравнение (13.9) для получения оценок из уравнения (13.11).

В блоке *6* решается система из $n+k$ линейных алгебраических уравнений (13.11) и ищется $\hat{\chi}_{N+1}(t_0)$, то есть, $\hat{q}_{N+1}$и $\hat{x}_{N+1}(t_0)$.

В блоке *7* оценивается норма разности приближений вектора параметров на последних двух шагах. Если эта норма не больше заданной величины ε, то процесс идентификации завершается, а в блоке *9* производится вывод найденного значения вектора параметров. В противном случае происходит переход к следующей итерации.

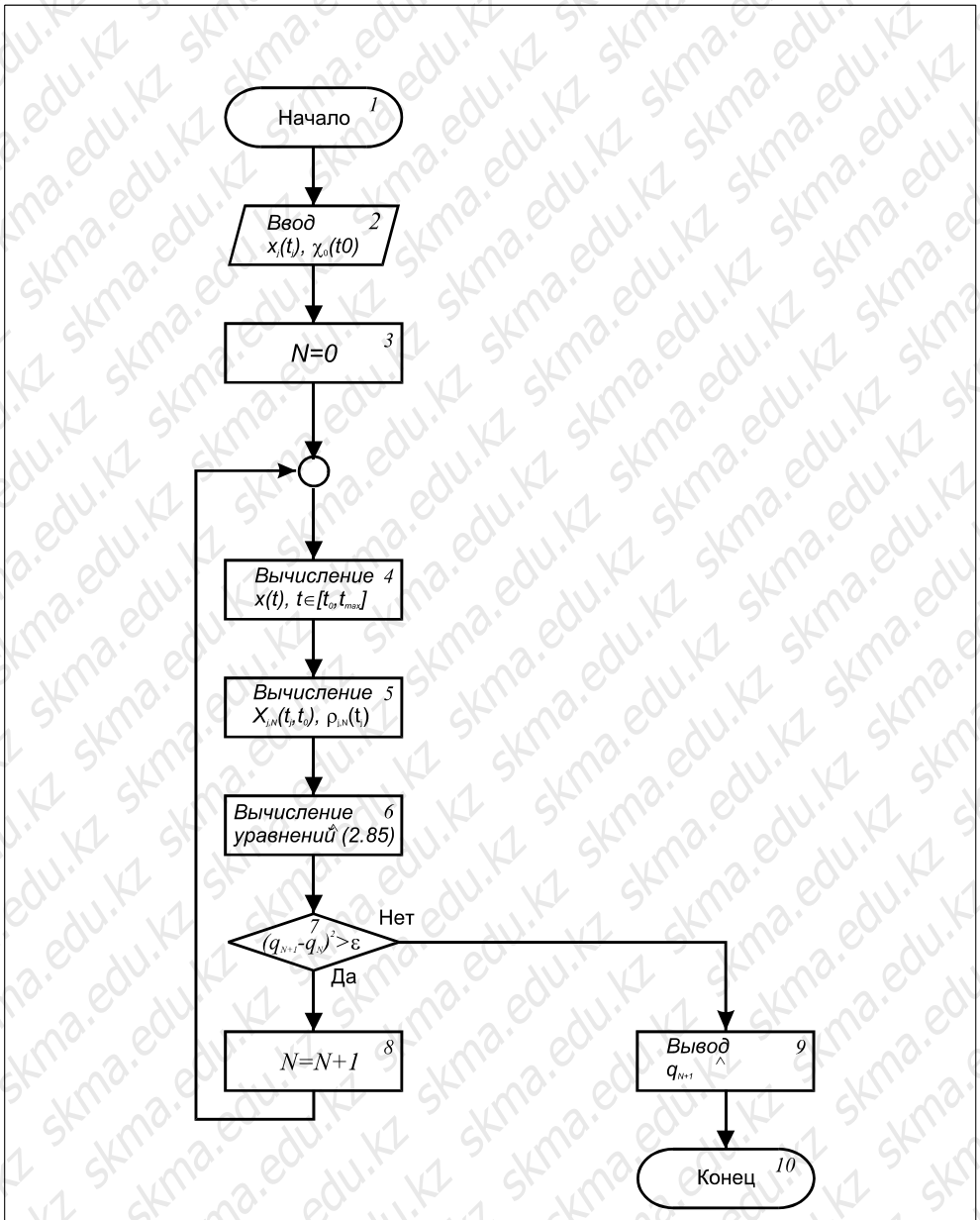


Рис. 2.2. Блок-схема алгоритма вычислений при идентификации методом квазилинеаризации

Рисунок 13.1 – блок-схема алгоритма вычислений при идентификации методом квазилинеаризации

Рассмотрим реализацию метода квазилинеаризации на примере.

Пример

Рассмотрим достаточно простую систему:

$$\dot{x} = ax^3 + bu(t). \qquad (13.13)$$

Здесь: *u(t)* – входная измеряемая скалярная функция,

x – скаляр,

a, b – необходимо найти.

Имеется три измерения переменной состояния $x(t_1), x(t_2), x(t_3)$. Обозначим:

$$\chi = \begin{bmatrix} x \\ a \\ b \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (13.6), *(N+1)-е* приближение вектора χ имеет вид:

$$\hat{\chi}_{N+1} = \hat{\Psi}\Big|_{\hat{\chi}=\hat{\chi}_N} + \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi}\Big|_{\hat{\chi}=\hat{\chi}_N} (\hat{\chi}_{N+1} - \hat{\chi}_N), \tag{13.14}$$

$$\hat{\Psi} = \begin{bmatrix} \hat{a}\hat{x}^3 + \hat{b}u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\chi} = \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13.15}$$

В соответствием с уравнение (13.10), будет:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{b}} \end{bmatrix}_{N+1} = \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2 & x^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_N \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}_N. \tag{13.16}$$

Из уравнения (13.16) ищется фундаментальная матрица $X_N(t,t_0)$. Согласно (13.7)

$$\hat{V}_N = \hat{\Psi}_{\chi=\hat{\chi}_N}\Big| - \hat{A}_N\hat{\chi}_N = \begin{bmatrix} \hat{a}\hat{x}^3 + \hat{b}u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_N - \begin{bmatrix} 3\hat{a}\hat{x}^2 & \hat{x}^3 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_N \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}. \tag{13.17}$$

.

Идентификация линейных динамических систем. Определение весовой функции из уравнения свертки

По наблюдениям входного и выходного сигналов линейной стационарной системы на конечном промежутке времени нужно определить ее весовую функцию (импульсная переходная функция).

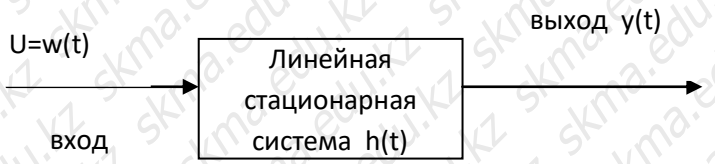


Рисунок 13.2 - Линейная стационарная системы

Выходной сигнал системы при входе и нулевых начальных условиях выражается известным интегралом свертки:

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)w(\tau)d\tau \qquad (13.23)$$

предполагается, что $w(\tau)=0$ при $r<0,\ w(0)\neq 0.$

Введем теперь аппроксимацию входной функции времени $w(t)$ кусочно-постоянной функцией в N точках с шагом Δ, причем $N\Delta=T$

$$w(t)\approx w(n\Delta) \text{ при } n\Delta<t<(n+1)\Delta \qquad (13.24)$$

h(t) примем постоянной между точками разбиения.

$$h(t)\approx h\left(\frac{2n+1}{2}\Delta\right) \text{ при } n\Delta<t<(n+1)\Delta \qquad (13.15)$$

В терминах ступенчатой аппроксимации $w(t)$ и $h(t)$ интеграл (13.23) при t = nΔ приближенно запишется в виде

$$y(n\Delta)=\Delta\sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{2n-1}{2}\Delta-i\Delta\right)w(i\Delta) \qquad (13.25)$$

Обозначим вектор наблюдения выхода (размерности N) через

$Y^T(T) = [y(\Delta)\ y(2\Delta)\ \ldots\ y(N\Delta)]$

и значений весовой функции

$$h^T(T)=\left[h\left(\frac{\Delta}{2}\right)h\left(\frac{3\Delta}{2}\right)\ldots h\left(\frac{2N-1}{2}\Delta\right)\right].$$

Перепишем уравнение (13.25) в векторно- матричном виде

$$Y(T) = \Delta W h(T) \qquad (13.26)$$

Матрица W определяется равенством

$$W=\begin{bmatrix} w(0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w(\Delta) & w(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w(2\Delta) & w(\Delta) & w(0) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w[(N-1)\Delta] & w[(N-2)\Delta] & \dots & \dots & \dots & w(0) \end{bmatrix}$$

Отметим, что W – левая треугольная матрица, $w(0)$ на диагонали.

Теперь задача сведена к определению из уравнения (13.26) вектора h значений весовой функции в точках фиксации. Т.к. $w(0)\neq 0$, w –невырожденная и $\det W\neq 0$.

Поэтому формально решение уравнения (13.26) можно записать в виде

$$h=W^{-\Delta}y \qquad (13.27)$$

Благодаря левой треугольной форме W выражение для h можно переписать в рекуррентном виде

$$h_n=\frac{1}{w(0)}\left[\frac{Y(n\Delta)}{\Delta}-\sum_{i=1}^{n-1}h_{n-i}w(i\Delta)\right] \qquad (13.28)$$

где $h_n=h\left(\frac{2n-1}{2}\Delta\right), \qquad h_1=\frac{Y(\Delta)}{\Delta w(0)}$

Достоинством рассмотренного подхода является возможность использовать любые входные сигналы. Поскольку нет необходимости применять специальные тестовые сигналы, можно использовать реализации, полученные в процессе нормальной эксплуатации системы.

Если входной сигнал является функцией единичного скачка, алгоритм (13.28) заметно упрощается. В этом случае w(iΔ) = 1 для всех i, (13.28) примет вид

$$h_n=\frac{y(n\Delta)}{\Delta}-\sum_{i-1}^{n-1}h_{n-i}$$

.

Определив величину $H_n=\sum_{i-1}^{n-1}h_{n-i}$,

получим $h_n=\frac{y(n\Delta)}{\Delta}-H_n$ при этом $H_n = H_{n-1} + h_{n-1}$.

Оценивание весовой функции по методу наименьших квадратов

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом показанную на рисунке 13.2.. Объект предполагается линейным и стационарным. Выход системы запишем в виде (см. рисунок 13.3):

$$z(t) = \int_0^{T_S} h(\tau)x(t-\tau)d\tau + n(t) \qquad (13.29)$$

h(τ) - весовая функция (импульсная переходная функция)

x(t-τ)- вход, n(t) - невязка (иногда называют шумом),

T_S - время установления, определяется как min интервал времени, измеренный от момента подачи импульсного сигнала до момента, когда реакция системы составит 5% пикового значения .

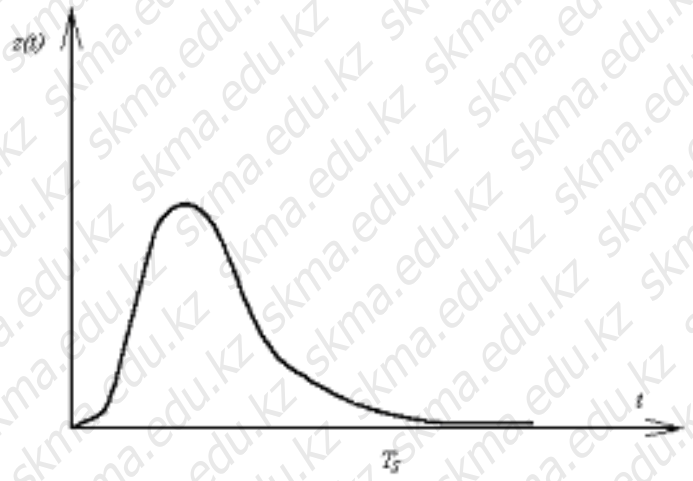


Рисунок 13.3 - Зависимость выхода системы z(t) от времени – уравнение 13.29

Входная и выходная переменные представлены в формуле (13.29) в виде отклонений от своих математических ожиданий, т.е.

$$x(t) = x - m_x, \qquad z(t) = z - m_z.$$

Представим уравнение (13.29) в дискретном виде

$$z(i\Delta) = \sum_{j=0}^{N_S-1} h(j\Delta)x[(i-j)\Delta]\Delta + n_i, i = 0,1,...,N_{m-1}$$

или

$$z_i = \sum_{j=0}^{N_S-1} h_j x_{i-j}\Delta + n_i, \qquad (13.30)$$

Здесь $T_S = N_S\Delta$ - время установления, $T_m = N_m\Delta$ - время измерения выхода, N_i - содержит не только невязку в моменты времени n(iΔ), но и ошибки аппроксимации функции x(t-τ).

В результате аппроксимации задача оценивания непрерывной функции h(τ) заменяется (параметризуется) оцениванием конечного множества параметров h_0 ,..., h_{Ns-1} (называется дискретной импульсной переходной функцией)

Для упрощения представления запишем уравнения (2) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} z_o \\ \vdots \\ z_{N_m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,0} \dots x_{0,N_S-1} \\ \dots \\ x_{N_m-1,0} \dots x_{N_m-1,N_S-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_o\Delta \\ \vdots \\ h_{N_S-1}\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_o \\ \vdots \\ n_{N_m-1} \end{bmatrix} \quad (13.31)$$

Запишем матричное представление в символическом виде

$$z = A\beta + n \quad (13.32)$$

Задача сводится к определению вектора параметров β при заданной матрице A и вектора измерений z.

Критерием при оценивании вектора параметров β является выбор таких β, которые минимизируют сумму квадратов невязок на интервале измерений.

Положим $J = \sum_{i=1}^{N_m-1} n_i^2$ в матричном виде $J = n^T n$ (13.33)

подставляя (13.32) в (13.33) получим $J=(z-A\beta)^T (z-A\beta)$

Необходимо определить β^*, удовлетворяющие условию

$$J^* = \min_{\beta} J = J /_{\beta=\beta^*}.$$

Необходимым условием вычисления J является выполнение условия экстремума

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} |\beta=\beta^* = 0$$

.

Запишем уравнения (13.21) в виде сумм

$$J = \sum_{i=0}^{N_m-1} \left(z_i - \sum_{j=0}^{N_S-1} a_{ij}\beta_j \right) \left(z_i - \sum_{k=0}^{N_S-1} a_{ik}\beta_k \right) \quad (13.34)$$

Продифференцируем (13.24) J по компонентам вектора β:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_m} /_{\beta_m=\beta_m^*} = \sum_{i=0}^{N_m-1} \left[-a_{im} \left(z_i - \sum_{k=0}^{N_S-1} a_{ik}\beta_k^* \right) + \left(z_i - \sum_{j=0}^{N_S-1} a_{ij}\beta_j \right)(-a_i) \right] =$$

$$= -2 \sum_{i=0}^{N_m-1} a_{im} \left(z_i - \sum_{k=0}^{N_S-1} a_{ik}\beta_k^* \right) \quad \text{при } m = 0,1,..., N_S-1$$

(13.35)

Формулу (13.35) представим в матричном виде:

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} /_{\beta=\beta^*} = -2A^T(z - A\beta^*) = 0 \quad (13.36)$$

это уравнение является необходимым условием экстремума J.

Достаточным условием при расчете min J является положительная определенность квадратной матрицы

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial J}{\partial\beta}\right)^T /_{\beta=\beta^*}$$

Если формулу (13.26) продифференцируем еще раз по β, то получим

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial J}{\partial\beta}\right)^T /_{\beta=\beta^*} = 2A^T A \qquad (13.37)$$

Если матрица A^TA - неособенная, и также правая часть не зависит от β в (13.37), то условие экстремума (13.36) является необходимым и достаточным условием минимума.

Перепишем (13.36) в виде:

$A^TA\,\beta^* = A^Tz$, отсюда $\beta^* = (A^TA)^{-1}A^Tz$ (13.38)

Напомним, что

$$A=\begin{bmatrix} x\ldots x \\ x\ldots x \end{bmatrix},\quad \beta^{*T}=\left[h_0^*\Delta,\ldots,h_{N_i-1}^*\Delta\right],\quad z^{*T}=\left[z_0\ldots z_{N_m-1}\right].$$

В непрерывной форме уравнение (13.38) принимает вид

$$\int_0^{T_S}\left[\int_0^{T_m} x(t-\tau)x(t-\theta)dt\right]h^*(\theta)d\theta=\int_0^{T_m} x(t-\tau)z(t)dt \qquad (13.39)$$

Уравнение (13.39) – **уравнение Винера-Хопфа (УВХ)** и может быть переписано в виде:

$$\int_0^{T_S} R_{xx}(r-\theta)h^*(\theta)d\theta=R_{xz}(r)$$

где $R_{xx}(\tau)$ - автокорреляционная функция $\frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} x(t-\tau)x(t)dt$ и $R_{xz}(\tau)$ - взаимная корреляционная функция.

Автокорреляционной функцией случайного процесса X(t) называется неслучайная функция двух аргументов $K_{xx}(t,t')$, которая при каждой паре значений t,t‘ равна корреляционному моменту соответствующему случайному сечению функции X(t).

$K_{xx}(t,t') = M\left[\overset{0}{X}(t)\,\overset{0}{X}(t')\right]$.

Контрольные вопросы

1 Оценивание параметров и состояния объектов;

2 Винеровское оценивание;

3 Уравнение Винера – Хопфа;

4 Фильтр Калмана-Бьюси;

5 Методы квазилинеаризации;

6 Идентификация линейных динамических систем. Определение весовой функции из уравнения свертки;

7 Оценивание весовой функции по методу наименьших квадратов;

8 Оценивание состояния фильтром Калмана.

Литература

Основная литература

1. Эйкхофф П. Основа идентификации систем управления. - М.: Мир, 1975.
2. Бенькович Е.С. и др. Практическое моделирование динамических систем. -СПб: БХВ-Петербург, 2002

Дополнительная литература

3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2009

14 лекций Методы идентификации настраиваемыми адаптивными моделями

Цель: на лекции мы рассмотрим следующие вопросы: Методы идентификации с помощью настраиваемых адаптивных моделей; адаптивные типы моделей динамических объектов; линейные модели по параметрам, сигналам; структурные схемы идентификации при использовании адаптивных моделей; связь характеристик входного сигнала с процессом настройки, условия независимости настройки параметров; виды критериев приближения модели к объекту; синтез алгоритмов настройки моделей и аналогов градиентными методами с использованием критериев гиперустойчивости и второго метода Ляпунова; уплотнение синтезированных алгоритмов для настройки адаптивных м.

Тезисы

Адаптивное управление — совокупность методов теории управления, позволяющих синтезировать системы управления с возможностью изменения параметров регулятора или структуры регулятора в зависимости от изменения параметров объекта управления или внешних движений, влияющих на управление. объект. Такие системы управления называются адаптивными. Адаптивное управление широко используется во многих приложениях теории управления.

Классификация адаптивных систем. По характеру изменений, происходящих в устройстве управления, адаптивные системы подразделяются на две большие группы:

• саморегулируемый (изменяются только значения регулировочных параметров);

• самоорганизатор (изменена структура регулятора).

Системы классифицируются по способу изучения объекта:

• поисковик;

• без поиска.

В первой группе особой популярностью пользуются экстремальные системы, целью управления которыми является поддержание системы в крайней точке статических свойств объекта. В таких системах к сигналу управления добавляется сигнал трассировки для определения эффектов управления, вызывающих экстремумы. Системы адаптивного управления без поиска по способу получения информации для более точной настройки параметров регулятора классифицируются на следующие:

• системы с эталонной моделью (ЭМ);

• системы с идентификатором, в литературе их обычно называют системами с настраиваемой моделью (БМ).

Адаптивные системы с ЭМ включают в себя динамическую модель системы, имеющую желаемое качество.

содержать динамическую модель системы, имеющую необходимое качество. Адаптивные системы с идентификаторами по способу управления классифицируются на:

• напрямую;

• косвенный (не прямой).

При косвенном адаптивном управлении сначала оцениваются параметры объекта, а затем на основе полученных значений определяются необходимые значения параметров регулятора и производится их более точная настройка. При прямом адаптивном

управлении за счет учета связи между объектом и параметрами регулятора осуществляется непосредственная оценка и более точная настройка параметров регулятора, благодаря чему исключается период идентификации параметров объекта. По способу достижения эффекта самонастройки системы с моделью классифицируются на следующие:

- **системы с сигнальной** (пассивной) адаптацией;
- **системы с параметрической** (активной) адаптацией.

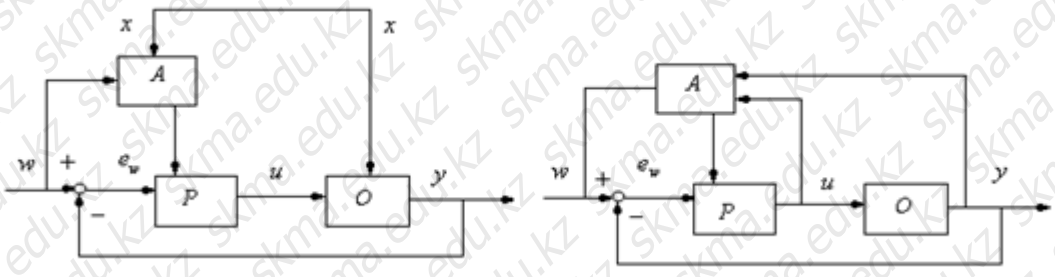
В системах с адаптацией сигналов эффект самонастройки достигается с помощью компенсирующих сигналов без изменения параметров устройства управления. Системы, сочетающие в себе оба типа адаптации, называются комбинированными системами. Они используются для управления нелинейной системой или системой с переменными параметрами. К таким системам относятся, например, асинхронные машины, транспортные средства на магнитной подушке, магнитные подшипники и т.п. атрибуты. К механическим системам относятся перевернутые маятники, подъемно-транспортные машины, роботы, шагающие машины, подводные машины, самолеты, ракеты и типы управляемого высокоточного оружия и др. можно назвать.

Таким образом, идея адаптивных систем управления совершенствуется с целью повышения эффективности систем управления. Основное отличие адаптивных систем управления от систем с фиксированными параметрами состоит в том, что они могут адаптироваться к изменяющимся характеристикам объектов и происходящим в них процессам (точнее, корректироваться) (рис. 14.1). Существует два основных способа настройки элементов управления:

- регулировка при прямом подключении (адаптация по отключенному циклу);
- настройка с обратной связью (адаптация по замкнутому контуру).

Если известно, как следует регулировать регулятор в зависимости от внешних входных факторов (доступно для прямого измерения), то можно использовать прямой метод регулировки.

В тех случаях, когда невозможно напрямую оценить динамические свойства объекта, приходится использовать настройку с обратной связью или адаптацию с обратной связью. В это время необходимый минимум информации об объекте получается путем обработки измерений входных и выходных сигналов. Использование адаптации структурно эквивалентно введению второго контура обратной связи и, соответственно, второго замкнутого контура.



A – алгоритм настройки, P – регулятор, O – объект управления, w – вектор заданной переменной,

ew – ошибка управления ew =w – y.

Рисунок 14.1 – Структурная идентификация при адаптации

Все адаптивные контроллеры можно разделить на два класса: самооптимизирующиеся контроллеры и контроллеры с эталонной моделью.

В системах управления с регуляторами или эталонными моделями процесс адаптации протекает в три этапа: идентификация объекта (эталонной модели) или системы управления в целом; расчет контроллера; отрегулировать регулятор.

Идентификация по замкнутому контуру. Особенности непосредственной идентификации дискретных моделей в замкнутом контуре (см. рис. 14.2).

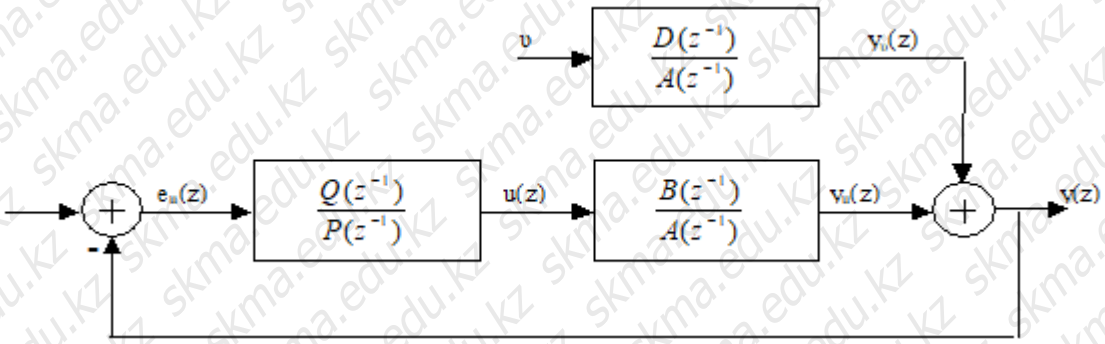


Рисунок 14.2 – Идентификация замкнутого контура

В такой формулировке отчета может быть несколько вариантов способов идентификации модели.

1. Косвенная идентификация объекта управления. Оценивает параметры замкнутой цепи, если известны параметры регулятора, определяет характеристики объекта с помощью аналитических преобразований.

2. Определяет параметры объектной модели напрямую, минуя интервал идентификации за

3. Для измерения доступны только выходные параметры системы.

4. Меры y и u.

5. На объекте нет внешнего раздражителя, тогда ю=y

6. На объект действуют внешние раздражители, но они не учитываются при идентификации.

7. Эффект внешнего стимулирования настолько значителен, что его учитывают при идентификации параметров модели.

При рассмотрении задачи будем считать, что объект управления большой, а регулятор линейный, стационарный и не подвержен воздействию препятствий.

Функции передачи объекта:

$$Gp(z) = \frac{b_1 z^{-1} + \ldots + b_{mb} z^{-mb}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{ma} Z^{-ma}} \cdot Z^{-d}$$

$$Gpv(z) = \frac{1 + d_1 z^{-1} + \ldots + d_{md} z^{-md}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{ma} Z^{-ma}}$$

$$Gr(z) = \frac{g_0 + g_0 z^{-1} + \ldots + g_0 z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + \ldots + p_M Z^{-M}}$$

Если мы возьмем u(z) в качестве входных данных и y(z) в качестве выходных, то мы определим передаточные функции;

$$W(z) = \frac{y(z)}{V(Z)} = \frac{Gpv}{1 + Gr + Gp} = \frac{D(z^{-1})P(z^{-1})}{A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})Q(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{\alpha(z^{-1})} = \frac{(r)}{(l)}$$

l=max[ma+μ, mb+υ+d]

θTα,β=[α1... αl β1...βr]

θa,b=F/ θα,β /

Для решения проблемы неоднозначности необходимо выполнение определенных условий, которые называются условиями идентификации объекта в замкнутой схеме.

Объект, входящий в состав замкнутой цепи управления, называется параметрически идентифицируемым объектом, если с помощью какого-либо метода идентификации можно получить конкретные значения его параметров:

$$\lim_{N \to \infty} E\{\theta(N)\} = \theta$$

Для объекта, удовлетворяющего этому условию, можно сформулировать 2 условия, называемые условием идентификации объекта в замкнутой цепи. Порядок моделей ma и mb идентифицируемого объекта и порядок вычитания модели mb должны быть известны заранее.

Если значения параметров модели Ai и Bi с числом (ma+mb) определяются из уравнения l-параметрами αi и полиномами D(z-1) и A(z-1) не имеют общие корни, то необходимо выполнить следующее неравенство:

$$l \geq m_a + m_b$$

$$\max\left|m_a + \mu, m_b + \upsilon + d\right| \geq m_a + m_b \quad \text{или} \quad \max\left|\mu - m_b, \upsilon + d - m_a\right| \geq \tau$$

$$\upsilon > \mu - d - m_a - m_b$$

$$\upsilon \geq m_a - d\,; \mu \geq m_b\,; \upsilon > m_a\,; \mu \geq m_b\,.$$

Если объект удовлетворяет этим условиям, то задача косвенной идентификации параметров объекта может быть решена однозначно.

Прямая идентификация параметров объекта в замкнутом контуре (см. рисунок 14.3).

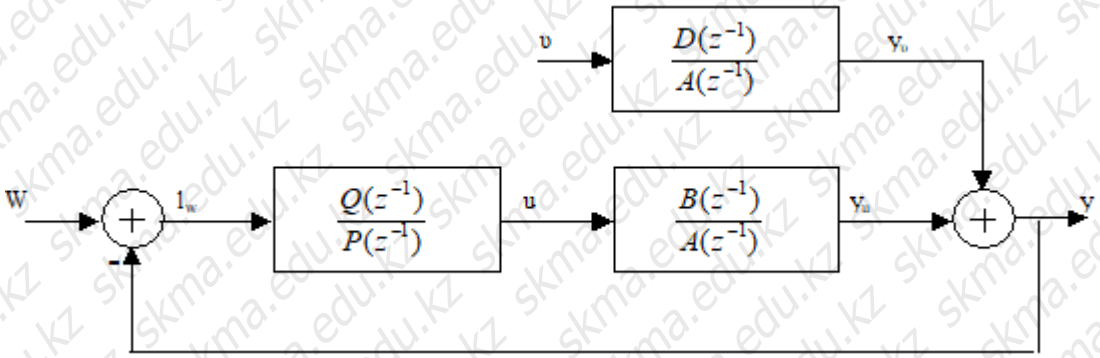


Рисунок 14.3 – Непосредственная идентификация параметров объекта в замкнутом контуре

W=0; lw=-y

$$\frac{U(z)}{V(z)} = \frac{-Gr \cdot Gpv}{1 + Gr \cdot Gp}$$

$$\frac{y(z)}{V(z)} = \frac{Gpv}{1 + Gr \cdot Gp}$$

$$\frac{y(z)}{U(z)} = \frac{y(z)V(z)}{U(z)V(z)} = -\frac{1}{Gr}$$

Представим полученные значения в виде дифференциальных уравнений:

$$A(z^{-1})y(z) = B(z^{-1}) \cdot z^{-d}U(z) - D(z^{-1}) \cdot V(z)$$

$$[A(z^{-1}) \cdot P(z^{-1}) + B(z^{-1}) \cdot z^{-d}Q(z^{-1})]y(z) = D(z^{-1}) \cdot U(z)$$

$$Q(z^{-1})y(z) = -P(z^{-1})U(z)$$

$$A(z^{-1})P(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}P(z^{-1})U(z) = D(z^{-1})P(z^{-1})V(z)$$

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}U(z) = D(z^{-1})V(z)$$

Отличие этого подхода состоит в том, что вход объекта U(z) в замкнутой цепи не является производной функцией, а y(z) является функцией.

Идентификация в замкнутой цепи при возникновении внешних возбуждений на выходе регулятора (см. рисунок 14.4)

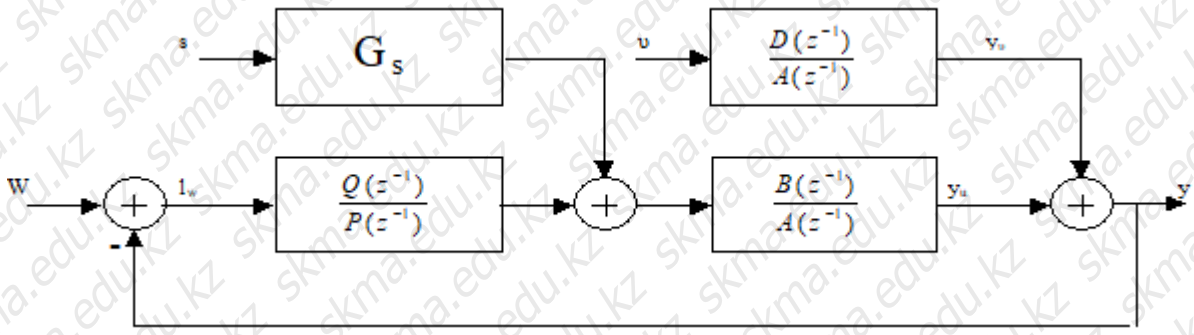


Рисунок 14.4 – Идентификация замкнутого контура при возникновении внешних возбуждений

Расчеты идентифицируются на основе дифференциального уравнения, и их вид такой же, как и до блокировки.

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}U(z) = D(z^{-1})V(z)$$

$$U(z) = Ur(z) + Us(z)$$

При любых значениях полинома ν и μ не являются линейной комбинацией вектора данных, то есть объект всегда можно идентифицировать независимо от порядка ν и μ.

На начальном этапе идентификации можно эффективно использовать метод наименьших квадратов, а при достижении определенной устойчивости – схему, использующую более точные алгоритмы получения оценок.

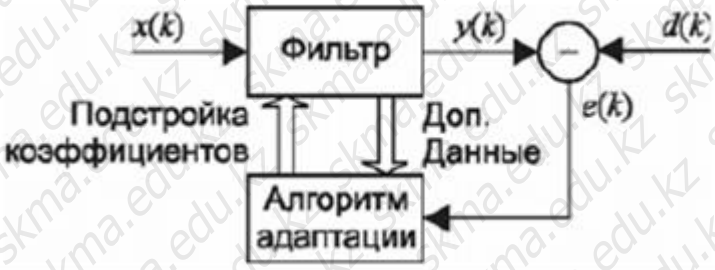


Рисунок 14.5 – Общая структура адаптивного фильтра

Контрольные вопросы

1 Метод сопоставления с пользовательскими адаптивными моделями;
2 Типа адаптивных моделей динамических объектов;
3 Линейные модели по параметрам, по сигналам;
4 Схемы структурной идентификации с использованием адаптивных моделей;
5 Связь процесса установки с входной спецификацией, условия независимости параметров параметров;
6 Типов критериев приближения модели к объекту;

Литература

Основная литература

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Метод оптимизации экспериментов в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополнены. -М.: Высшая школа, 2015. -327с.

2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. – Л.: Химия, 1970. –312 с.

3. Практикум по системам автоматизации и управления производственными процессами: занятие. пособие для вузов / Под ред. И. М. Масленникова. -М.: Химия, 2016. -336 с.

Дополнительная литература

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Метод идентификации линейных одномерных динамических систем. - М.: Изд-во МЭИ, 2007.

Лекция 15 Методы идентификации нелинейных динамических характеристик

Цель: Рассмотреть методы идентификация нелинейных динамических объектов включая вопросы: применение гармонической линеаризации при идентификации нелинейных объектов; использование метода статистической линеаризации для идентификации нелинейных объектов; идентификация нелинейных объектов с использованием функциональных степенных рядов

Тезисы

Существует несколько методов идентификации нелинейных систем, некоторые из них:

1. метод прямого поиска;
2. аппроксимация нелинейности;
3. модель Гаммерштейна;
4. метод Винера;
5. двухэтапная процедура; п
6. применение гармонической линеаризации при идентификации объектов;
7. использование метода статистической линеаризации для идентификации нелинейных объектов; и
8. идентификация нелинейных объектов с использованием функциональных степенных рядов
9. градиентные методы идентификации нелинейных систем и др.

Сущность метода прямого поиска:

- нелинейную функцию f(x) преобразуют в линейную функцию /л(x);
- далее применяют любой метод идентификации линейных систем.

Допустим, что нелинейная модель объекта имеет вид:

$$y = a_0 x_1^{в1} x_2^{в2},$$

где x_1, x_2 - входные параметры, у - выходной параметр, а0, в1, в2 - искомые параметры. Выполняем логарифмирование и получаем:

$$\ln y = \ln a_0 + в_1 \ln x_1 + в_2 \ln x_2;$$

$$Z = \ln y, \quad \varepsilon_1 = \ln x_1, \quad \varepsilon_2 = \ln x_2, \quad A = \ln a_0;$$

$$Z = A + в_1\varepsilon_1 + в_2\varepsilon_2$$

Рассматриваем только положительные значения у.

Аппроксимация нелинейности. Таблично заданная функция (явно нелинейная) аппроксимируется с помощью полинома произвольным методом. Полученный полином и есть модель нашего объекта. Ограничения: функция должна быть непрерывна. Существует теорема Вейерштрасса, которая доказывает, что все нелинейности можно описать полиномом:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + в_1 x_2 + в_2 x_2^2$$

а) Замена линейной переменной и сведение к регрессии;
б) Применение интегральных формул.

Модель Гаммерштейна

Входной сигнал u(t) известен.

Если известна функциональная зависимость f(u(t)) - вид нелинейности, то вводим Z=f(u(t)). Идентификация сводится к определению параметров линейной части:

$$y(t) = A \cdot Z(t).$$

Если функциональная зависимость f(u(t)) не известна, то строится таблица этой нелинейной зависимости. По этой таблице любой интерпретируемой формулой получаем аппроксимирующий полином нелинейности f*(u(t)). Зная параметры аппроксимирующего полинома, вводим Z(t) = f(u(t)) и, снимая соответствующие ему y(t), решаем задачу идентификации:

y(t)= A · Z (t).

xi — a0 ^+ ai xi, функция является нелинейной.

x2 = J (xi)

Пример: Система приводится к следующему виду (см. рисунок 15.1):

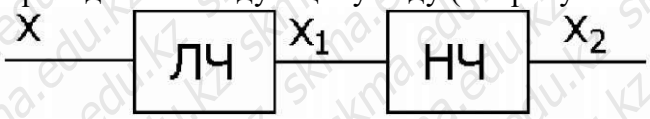


Рисунок 15.1 – Разбиение системы на линейную и нелинейную части

Схема нелинейной системы. Используя метод интерполяции, аппроксимируем полином

$$y = в_0 + в_1 x_1 + в_1 x_1^2 + \ldots + в_m x_1^m$$

Составляем обобщенный вектор:

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ x_1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^m \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow a_0 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \vdots \\ v_{m+3} \end{matrix}$$

Тогда искомая матрица:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & в_0 & в_1 & \ldots в_m \end{bmatrix}$$

может быть получена по выражению:

где

$$A = YV^T \left[VV^T \right]^{-1},$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_2(1) & x_2(2) \dots & x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1(1) & \cdots & v_1(k) \\ v_2(1) & \cdots & v_2(k) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m+3}(1) & \cdots & v_{m+3}(k) \end{bmatrix}$$

.

Линеаризация нелинейных характеристик путем разложения в ряд состоит в замене характеристики y = f(x) приближенной линейной зависимостью, определяемой двумя первыми членами разложения характеристики в ряд Тейлора . Пусть характеристика y = f(x) дифференцируема и входной сигнал x (f) мало отличается от некоторого среднего значения x0, тогда зависимость y = f(x) можно заменить приближенной:

y = f(x0) + f ' (x-0) (x - x0). (15.1)

Замена нелинейной зависимости y =f(x) линейной геометрически представляет собой замену кривой y= f(x), касательной к ней в точке x0.

Действующие внешние возмущения можно представить как стационарные случайные функции x (г) с математическим ожиданием тх и центрированной случайной составляющей л(г):

x(t)^mx + x(t). (15.2)

В этом случае практически линеаризацию нелинейной характеристики целесообразно производить относительно центрированного входного случайного сигнала x(t), т.е. за центр разложения .x0 в (15.1) взять математическое ожидание тх входного сигнала x(1). В результате получается:

y (г) *./>У + ./' (тх) x (г). (15.3)

Таким образом, приближенная зависимость (15.3) линейна только относительно случайной составляющей x(t) входного сигнала и нелинейно относительно математического ожидания тх, поэтому принцип суперпозиции здесь неприменим.

Гармоническая линеаризация. В целом ряде практических задач приходится рассматривать воздействие на линейное звено гармонических колебаний

X(t)= A sin ωt = A sin ψ, ψ=ωt. (15.4)

Выходной сигнал нелинейного звена также будем периодическим, но не гармоническим.

Идея гармонической линеаризации состоит в том, что выходные периодические колебания y(t) разлагают в ряд Фурье и для дальнейших исследований ограничиваются рассмотрением лишь первых гармоник этого ряда. В этом случае нелинейная зависимость

y= y(t)=f(Asinψ),

заменяется приближенной

Y(t)=a0+asin ωt+bcosωt=a0+ q1x+q2x/ω,

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(A\sin\phi)d\phi$$

$$q_1 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\phi)\sin\phi d\phi$$

$$q_2 = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\phi)\cos\phi d\phi$$

Статистическая линеаризация. Метод приближенной замены нелинейной характеристики эквивалентными в вероятностном смысле линейными зависимостями называется методом статистической линеаризации. В результате такой линеаризации нелинейная зависимость y=f(t) заменяется приближенной:

y(t)=kamx + k,x0(t).

где mx = const — математическое ожидание стационарного случайного сигнала на входе нелинейного элемента; x0(t) — центрированная случайная составляющая входного сигнала x (t).

Предполагается, что выходной стационарный случайный сигнал может быть представлен в виде:

y(t) = ту. + y/(t)

где ту — математическое ожидание y(t); y/(t) -центрированная случайная составляющая y(t).

Коэффициент к0 = ту/тх называется статистическим коэффициентом усиления нелинейного звена по математическому ожиданию.

Коэффициент k1=±σy/ σ x .

Идентификация нелинейных объектов с использованием функциональных степенных рядов Производная функции определяется разностным отношением:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Если существует предел и не зависит от того, как стремится к нулю, то функция является аналитической. Следовательно в окрестности некоторой точки а можно ее разложить в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{z-a}{n!} f^n(a) + \ldots$$

Если a=0 , то получаем ряд Маклорена:

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{z^n}{n!} f^n(0) + \ldots$$

Учитывая , что последующие слагаемые выше второго достаточно малые величины, можно заменить функцию линейной частью разложения

Градиентные методы идентификации нелинейных систем. Для общей задачи минимизации функционала:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t [z(t) - y(t)]^2 dt \qquad (15.5), (15.6)$$
$$x(t_0) = x_0$$

при ограничениях:

$$\dot{x} = f[x(t), p(t), t],$$

где f – нелинейная вектор – функция.

Случай p_i - const $\dot{p} = 0$ будем задаваться начальным значением p^i , i- номер итерации, и решив систему дифференциальных уравнений оценим величину функции штрафа J^i. Слегка изменяя p^i , для нового значения $p_j^i + h_j$ найдем штраф:

$J^i + \eta_j$, j = 1,n, n - число неизвестных коэффициентов

j-ю компоненту вектора-градиента функции штрафа можно приближенно оценить как

$$\frac{dJ}{dp_j^i} \approx \frac{(J^i + \eta_j) - J^i}{(p_j^i + h_j) - p_j^i} = \frac{\eta_j}{h_j} \qquad (15.7)$$

Повторяя эту процедуру для возмущений различных компонент вектора параметров, определим приближенное значение вектора-градиента dJ/dp^i Первое приращение вектора параметров в направлении наискорейшего спуска к минимуму функции штрафа составит

$$\Delta p^i = K^i \frac{dI}{dp^i}, \qquad (15.8)$$

и K^i – выбирается из условия

$$\min_{K^i} I(p^i - K^i \frac{dJ}{dp^i}) \qquad (15.9)$$

а новое приближение для вектора параметров определится как:

$p^{i+1} = pi + \Delta p^i$.

Простота приближенного метода позволила положить его в основу нескольких итерационных схем, однако трудно оценить ошибку, связанную с приближенным вычислением dJ/dp^i (процедура точного вычисления свелась бы к уже известным алгоритмам решения динамических задач). Приближенная процедура приводит к существенным ошибкам, особенно тогда, когда функция штрафа не очень чувствительна к изменению вектора параметров. Последнее, к сожалению, довольно часто имеет место, если измерения или наблюдения искажены помехой и имеются неизвестные входные сигналы.

Алгоритм вычислений следующий
1.Задаемся начальными значениями вектора параметров **p**.
2.Решаем дифференциальные уравнения (2)
3.Вычисляем значения функционала (1)
4.Вычисляем компоненты вектора-градиента функционала (1) по ф.(3).
5.Определяем новые значения p по ф.4 из условия (5)
6.Переходим к п.2 алгоритма, если компоненты вектора-градиента больше некоторой величины ε.

Если коэффициенты системы есть функции времени, т.е. p = p(t), то можно применить способы аппроксимации функции p(t).

1. Кусочно-постоянными функциями:

$$p^i = (p_i^1, p_i^2, ..., p_i^m)$$

2. Кусочно-линейными функциями вида, показанными на рисунке 15.2.

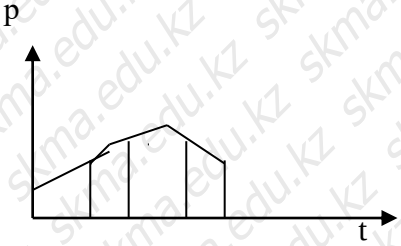


Рисунок 15.2 – Кусочно-линейная аппроксимация нелинейной функции

3. Полиномиальная гипроксимация.

$$p_i = \sum_{k=0}^{m_i} p_{i,k} t^k, \quad m_i = t_f / h_p,$$

4.Сплайн-аппроксимация (см. рисунок 15.3).

$$p_i = \sum_{k=0}^{m_i} p_{i,k} t^k, \quad m_i = t_f / h_{sp}, \text{ где } h_{2p} << h_p$$

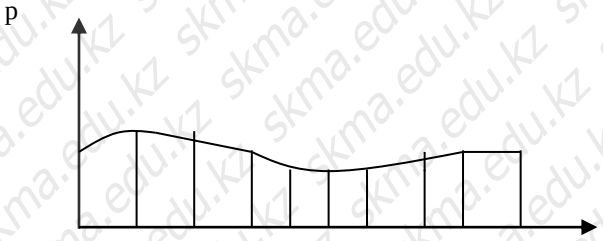


Рисунок 15.3 – Сплайн - аппроксимация нелинейной функции

Контрольные вопросы

1 Методы идентификация нелинейных динамических объектов включая вопросы;

2 Применение гармонической линеаризации при идентификации нелинейных объектов;

3 Использование метода статистической линеаризации для идентификации нелинейных объектов;

4 Идентификация нелинейных объектов с использованием функциональных степенных рядов

5 Адаптивное управление. Классификация адаптивных систем

Литература

Основная литература

1. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 2019
2. Иванов А. И. Быстрая идентификация нелинейных динамических объектов // CD-ROM “Бизнес-игры”. − М.: CD-ROM изд-во “Compact Book Publishing”, 2016. − 226 с.

Дополнительная литература

3. Бокс Дж, Дженкинс. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 1. –М.: Мир, 2016, 406с
4. Бокс Дж, Дженкинс. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 2. –М.: Мир, 2017, 193с